

Daniel de Souza Santos

Resolução da equação de Black-Scholes utilizando redes neurais.

Recife

26 de agosto de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Resolução da equação de Black-Scholes utilizando redes neurais.

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 26/08/2024 pela comissão examinadora

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira.

Recife

26 de agosto de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S237r Santos, Daniel de Souza.
Resolução da equação de Black-Scholes utilizando redes neurais / Daniel de Souza Santos. – Recife, 2024.
83 f.; il.

Orientador(a): Tiago Alessandro Espínola Ferreira.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2024.
Inclui bibliografia.

1. Mercado futuro. 2. Derivativos (Finanças). 3. Mercado de opções. 4. Redes neurais (Computação) 5. Equações diferenciais . I. Ferreira, Tiago Alessandro Espínola, orient.
II. Título

CDD 519.5

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Resolução da equação de Black-Scholes utilizando redes neurais.

Daniel de Souza Santos

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 26/08/2024 pela comissão examinadora

Orientador:

Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira.
Orientador

Banca examinadora:

Dr. Antônio de Pádua Santos
Universidade Federal Rural de
Pernambuco - examinador externo

Dr. Paulo Renato Alves Firmino
Universidade Federal do Cariri -
examinador externo

Dr. Borko Stosic
Universidade Federal Rural de
Pernambuco - examinador interno

Dr. Francisco de Sousa Ramos
Universidade Federal de Pernambuco -
examinador externo

*Dedico este trabalho à minha esposa, Aline Santos, à minha mãe, Marluce de Souza e à
minha filha, Lorena de Souza, com muito amor.*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus por ter ouvido e atendido minhas constantes orações pela oportunidade de fazer meu curso de doutorado. Esperei com paciência e a porta se abriu e agora concluo meu curso.

Agradeço à minha esposa, Aline Santos, que com muita paciência, amor e compreensão me apoiou desde o início desta jornada. Cuidou carinhosamente de mim e de nossa filha, Lorena. Sem ela ao meu lado, teria sido muito mais difícil.

Devo um agradecimento especial à minha mãe, Marluce de Souza, que me apoiou desde o começo e sempre acreditou em mim. Seus conselhos e exemplos foram decisivos para eu não me desviar dos meus objetivos.

Agradeço ao meu orientador, professor Tiago Ferreira, por toda sua paciência e didática, ao me ensinar sobre Python e redes neurais, mesmo eu utilizando o Windows 11 como sistema operacional.

Agradeço a um grande amigo e colega de profissão: Daniel César, pois foi ele o primeiro colega a me sinalizar que chegou o momento de eu cursar meu doutorado, no final de 2019. Sempre muito solícito e um verdadeiro amigo que a vida me deu. Agradeço também a outro grande amigo e colega de trabalho: professor Aléssio, que sempre me ajudou nas demandas do *campus* Serra Talhada e foi outro grande apoiador do meu trabalho.

Agradeço também ao Deão Rafael Oliveira, pastor da Igreja Episcopal Carismática do Brasil, que abriu as portas do SETEC para mim e lá pude aprender o valor da vida devocional e ter paz na relação entre Ciência e Cristianismo, sendo tudo isso decisivo para eu permanecer no foco deste trabalho.

Agradeço ainda ao Rev. Marcondes Soares, também pastor da Igreja Episcopal Carismática do Brasil, pelos seus sábios ensinamentos que me trouxeram paz. Sendo eu um cristão trabalhando com ciência aplicada, pude perceber através de seus ensinamentos que este trabalho também honra ao Senhor Jesus.

Agradeço à psicóloga Kaline Almeida, que quando eu estava prestes a desistir de meu sonho, em 2019, me motivou a continuar na estrada, sendo o resultado final esta tese.

Agradeço a todos que me ajudaram em oração.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

O presente trabalho trata de uma nova metodologia para a precificação de opções europeias do mercado brasileiro: a proposta de uma nova resolução da Equação de Black-Scholes através de uma Rede Neural *Multi Layer Perceptron*. Trata-se de um problema de aprendizado supervisionado no qual a resposta da Rede Neural é dada pela resolução da Equação Diferencial e as condições de contorno são os preços praticados no mercado de derivativos brasileiro. A Equação Diferencial de Black-Scholes admite uma solução analítica, mas esta solução ficou muito distante dos dados praticados no mercado, tornando-a inviável para o uso comercial. Foi verificado que a Rede Neural consegue aprender com os dados e apresentou resultados melhores que a solução analítica de Black-Scholes, aproximando-se mais dos dados praticados no mercado de derivativos. Também foi testada a capacidade de aprendizado da Rede Neural em comparação com a modelagem ARIMA e esta foi mais precisa para horizontes curtos de previsão, mas para horizontes maiores a Rede Neural apresentou resultados mais satisfatórios. A metodologia apresentada neste texto demonstra que é possível fazer previsões de preços de opções europeias com uma pequena quantidade de dados reais e com a nova solução da Equação Diferencial de Black-Scholes.

Palavras-chaves: Econofísica. Derivativos. Opções Europeias. Redes Neurais.

Abstract

The present work addresses a new methodology for the pricing of European options in the Brazilian market: the proposal of a new resolution of the Black-Scholes Equation through a Multi-Layer Perceptron Neural Network. This is a supervised learning problem in which the response of the Neural Network is determined by solving the Differential Equation, and the boundary conditions are the prices practiced in the Brazilian derivatives market. The Black-Scholes Differential Equation has an analytical solution, but this solution has diverged significantly from the data observed in the market, making it unfeasible for commercial use. It was verified that the Neural Network can learn from the data and showed better results than the analytical solution of Black-Scholes, getting closer to the prices practiced in the derivatives market. The learning capacity of the Neural Network was also tested in comparison with ARIMA modeling, and it was more accurate for short-term forecasting horizons, but for longer horizons, the Neural Network showed more satisfactory results. The methodology presented in this text demonstrates that it is possible to make predictions of European option prices with a small amount of real data and with the new solution to the Black-Scholes Differential Equation.

Key-words: Econophysics. Derivatives. European options. Neural networks.

Lista de Figuras

Figura 1 – Payoff de uma posição comprada numa opção de compra.	7
Figura 2 – Payoff de uma posição comprada numa opção de venda.	8
Figura 3 – Payoff de uma posição vendida numa opção de compra.	8
Figura 4 – Payoff de uma posição vendida numa opção de venda.	9
Figura 5 – Função densidade da distribuição Lognormal.	10
Figura 6 – A área sombreada representa $N(x = 2)$	12
Figura 7 – Diagrama de um neurônio. Fonte: autoria própria.	19
Figura 8 – Diagrama de uma camada de neurônios. Fonte: autoria própria.	20
Figura 9 – Diagrama resumido de uma camada de neurônios. Fonte: autoria própria.	21
Figura 10 – Diagrama resumido de três camadas de neurônios. Fonte: autoria própria.	22
Figura 11 – Tangente Hiperbólica. Fonte: autoria própria.	26
Figura 12 – (a) Resultados para PETRA332 (menor MSE), (b) Resultado para o PETRA391 e (c) resultados para PETRA108 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).	32
Figura 13 – (a) Resultados para PETRD266 (menor MSE), (b) Resultado para o PETRD122 e (c) resultados para PETRD198 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).	34
Figura 14 – (a) Resultados para VALED765 (menor MSE) e (b) resultados para VALED655 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).	36

- Figura 15 – (a) Resultados para PETRA357-1d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA266-1d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 37
- Figura 16 – (a) Resultados para PETRA282-5d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA53-5d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 39
- Figura 17 – (a) Resultados para PETRA356-10d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA108-10d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 41
- Figura 18 – (a) Resultados para PETRD291-1d (menor MSE), (b) Resultado para PETRD122-1d, (c) Resultados para PETRD198-1d, (d) Resultado para PETRD271-1d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 44
- Figura 19 – (a) Resultados para PETRD291-5d (menor MSE), (b) Resultado para PETRD122-5d, (c) Resultado para PETRD198-5d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 47

Figura 20 – (a) Resultados para PETRD291-10d (menor MSE), (b) Resultados para PETRD122-10d e (c) Resultados para PETRD227-10d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela). 50

Lista de tabelas

Tabela 1 – <i>Moneyness</i> da opções de compra e de venda.	6
Tabela 2 – Classificação da Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem.	14
Tabela 3 – Vencimentos da séries de opções no mercado brasileiro.	25
Tabela 4 – Erros Estatísticos para Rede Neural (NN) MLP das Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série A para PETR4. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	30
Tabela 5 – Erros Estatísticos para Rede Neural (NN) MLP das Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	33
Tabela 6 – Erros estatísticos para a Rede Neural MLP das Opções Vale com modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	35
Tabela 7 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 1 dia: PETRD-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	38
Tabela 8 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 5 dias: PETRA-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	40
Tabela 9 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série A para PETR4. Horizonte de 10 dias: PETRA-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	42
Tabela 10 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 1 dia: PETRD-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	45

Tabela 11 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 5 dias: PETRD-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	48
Tabela 12 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 10 dias: PETRD-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	51
Tabela 13 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 1 dia: VALED-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	54
Tabela 14 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 5 dias: VALED-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	56
Tabela 15 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 10 dias: VALED-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.	58

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão de Literatura	3
2.1	Derivativos	3
2.2	Opções	4
2.2.1	Definições básicas	4
2.2.2	Classificação	5
2.2.3	<i>Moneyness</i>	6
2.2.4	<i>Payoff</i>	6
2.3	Distribuição lognormal	9
2.4	O Modelo de Black-Scholes	10
2.4.1	Capitalização contínua	12
2.5	A equação do calor e o modelo de Black-Scholes	14
2.5.1	A equação do calor	14
2.5.2	Transformando a equação de Black-Scholes na equação do calor	14
2.6	Redes Neurais	18
2.6.1	O neurônio	19
2.6.2	Uma camada de neurônios	20
2.6.3	Multi Layer Perceptron	22
3	Objetivos	23
3.1	Objetivo Geral	23
3.2	Objetivos Específicos	23
4	Metodologia	24
4.1	Sobre os dados	24
4.2	Sobre a NN	25
4.2.1	Como a NN resolve uma Equação Diferencial	26
4.2.2	Aprendizado da rede	27
4.3	Métricas de erro	28
4.3.1	Erro Médio Absoluto (MAE)	28
4.3.2	Erro médio quadrado (MSE)	28
4.3.3	Erro percentual médio absoluto (MAPE)	28
4.3.4	Previsão de Mudança de Direção (POCID)	28
4.3.5	Variância Média Relativa (ARV)	29

5	Resultados	30
5.1	Aprendizado da NN	30
5.1.1	PETRA	30
5.1.2	PETRD	32
5.1.3	VALED	35
5.2	Forecasting	36
5.2.1	PETRA	37
5.2.1.1	PETRA - 1 Dia	37
5.2.1.2	PETRA - 5 Dias	39
5.2.1.3	PETRA - 10 Dias	41
5.2.2	PETRD	44
5.2.2.1	PETRD - 1 Dia	44
5.2.2.2	PETRD - 5 Dias	47
5.2.2.3	PETRD - 10 Dias	50
5.2.3	VALED	52
5.2.3.1	VALED - 1 Dia	52
5.2.3.2	VALED - 5 Dias	55
5.2.3.3	VALED - 10 Dias	57
6	Conclusão	60
	Referências Bibliográficas	62

1 Introdução

A precificação de opções é um dos principais problemas em finanças quantitativas, sendo a literatura sobre este tema repleta de trabalhos recentes (DENG; YAO, 2024; SHVIMER; ZHU, 2024; MA; SHI; HON, 2024; GAO et al., 2024; GUO; KANG; WANG, 2024). As Opções constituem um subconjunto dos derivativos: o titular de uma opção tem o direito de comprar ou vender um ativo numa data predeterminada e por um preço acordado no momento da negociação do derivativo (LO., 2018). As opções podem ser europeias ou americanas. As opções europeias, tema central deste texto, só podem ser exercidas numa data específica, já as opções americanas podem ser exercidas em qualquer data dentro de um intervalo de tempo.

O modelo matemático mais famoso para a precificação de opções europeias foi desenvolvido nos anos 1970 e é conhecido como Equação de Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973). Trata-se de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica de Segunda Ordem e já foram propostas diversas formas para resolver esta Equação de forma analítica e numérica (HULL, 2016; MOLERO; MELLO, 2020; LO., 2018). Há outra modalidade de opções, as americanas, para as quais há estudos sobre a resolução desta equação para a precificação deste tipo de derivativos (SHEN; HUANG; MA, 2023; YAN et al., 2022; SHASHIASHVILI, 2023; HUSSAIN et al., 2023).

O presente trabalho trata de uma nova metodologia para a resolução da Equação de Black-Scholes: através de uma Rede Neural (*Neural Network*) do tipo Multi Camadas de Perceptrons (*Multi Layer Perceptron*). A resolução de uma Equação Diferencial por uma Rede Neural é um problema de aprendizado supervisionado, no qual a resposta para a Rede Neural é a resolução da Equação e as condições de contorno são os dados reais obtidos no mercado de derivativos brasileiro.

Para resolver a Equação de Black-Scholes, esta foi transformada na Equação de Fourier (AIUBE, 2013; IÓRIO, 2011) e como condições de contorno utilizaremos os preços de opções negociadas no mercado brasileiro sobre as ações de Petrobras (PETR4) e Vale (VALE3). Para cada ação, há um conjunto de opções disponíveis com datas de vencimento e preços de negociação diferentes. Os derivativos utilizados neste trabalho foram as séries de opções de compra europeias sobre as ações PETR4 com vencimentos em janeiro e abril de 2023; e as opções de compra europeias sobre as ações de VALE3 com vencimento em abril de 2023.

O trabalho será dividido em duas etapas: aprendizado e previsibilidade (*Forecast*). Para efeito de comparação, será utilizada também a solução analítica da Equação de Black-Scholes. Na primeira etapa será estudada a capacidade de aprendizado da Rede Neural (NN) apenas apresentando os dados reais e verificando quão próximo do valor real a solução numérica da NN consegue chegar. Na segunda etapa será estudada a capacidade de previsibilidade, onde serão utilizados três horizontes de previsão: 1 dia, 5 dias e 10 dias. Nesta segunda etapa também utilizaremos uma metodologia bem estabelecida: a modelagem ARIMA (BOX et al., 2015). A solução analítica da Equação de Black-Scholes também será exibida em todos os gráficos para efeitos de comparação.

Neste texto foi utilizada a seguinte convenção: o termo Rede Neural, do inglês, *Neural Network*, será abreviado por NN; uma rede do tipo Multi Camadas de Perceptrons, também do inglês *Multi Layer Perceptron* será abreviada por MLP.

Este trabalho traz a seguinte organização: no Capítulo 2 serão discutidos os conceitos básicos de derivativos e opções, é apresentado o modelo de Black-Scholes e as Redes Neurais. Em seguida são apresentados os objetivos no Capítulo 3. No Capítulo 4 é apresentada a configuração da NN implementada e as métricas de erro utilizadas na avaliação dos resultados obtidos. No Capítulo 5 são apresentados os resultados tanto do aprendizado da NN como de sua capacidade de previsibilidade e no Capítulo 6 são descritas as conclusões desta pesquisa e os próximos trabalhos.

2 Revisão de Literatura

2.1 Derivativos

Uma boa definição para derivativos, segundo (DODD; GRIFFITH-JONES, 2006): “Um derivativo é um contrato financeiro, cujo valor deriva de um ativo subjacente, preço de *commodity*, índice ou evento. Eles comumente são designados por nomes, como termo, futuro, opção e *swap*, e frequentemente estão embutidos em títulos híbridos ou estruturados”.

Os derivativos podem ser utilizados para reduzir o risco associado à volatilidade de preços de ativos ou taxas de juros, permitindo que as partes se protejam de grandes oscilações do mercado. Eles também são utilizados para aproveitarem oportunidades de arbitragem: ocasiões em que é possível obter lucro por conta de discrepâncias temporárias nos preços dos ativos subjacentes. Outra utilidade dos derivativos é a especulação, porque é possível lucrar com as oscilações dos preços e taxas no curto prazo (desde alguns dias até algumas semanas) (HULL, 2016). Há basicamente quatro tipos de derivativos: *swaps*, opções, futuros e termo. O presente trabalho concentrar-se-á no estudo das opções sobre ações. Este documento concentrar-se-á no estudo das opções, que tem sido alvo de diversos estudos em Econofísica recentemente (LIN; HAN; LI, 2021; HALPERIN, 2022; CAPUOZZO et al., 2021; LIN et al., 2021; OSPINA-FORERO; GRANADOS, 2023).

Um exemplo disso é o trabalho de (DENG; YAO, 2024) no qual o mercado de derivativos chinês e propõe um modelo GARCH contínuo para a descrição da dinâmica da relação dos riscos de inventário e uma formulação analítica geral para preços de opções e volatilidade implícita.

Em outro trabalho recente, (SHVIMER; ZHU, 2024) desenvolveu um modelo híbrido para precificação de opções com redes neurais profundas que melhora a previsão de opções em todos os níveis de monetização, mas com ênfase nas opções Fora do dinheiro, também conhecidas como Out of The Money, conceito este explicado na seção 2.2.2. Este modelo também explica o desvio de paridade Put-Call observado em dados reais.

Ainda podemos citar o trabalho de (MA; SHI; HON, 2024) no qual foi desenvolvido um Método de Integração Finita Generalizada (GFIM) com a técnica de transformação de Laplace para opções de preços sob o modelo Black Scholes e modelo Heston, respectivamente. O Método de Integração Finita Generalizada foi explorado para lidar com os operadores diferenciais espaciais no espaço transformado e a partir do algoritmo de inversão numérica

de Laplace, foi restaurado o preço de opção dependente do tempo necessário.

2.2 Opções

2.2.1 Definições básicas

Opções são um tipo particular de derivativos no qual o detentor (ou titular) de uma opção tem o direito, não a obrigação, de exercê-la. No presente texto trataremos somente sobre as opções sobre ações.

A seguir seguem algumas definições no mercado de opções:

- **Exercício:** Exercer uma opção, seja de compra ou de venda, significa exercer direito contratual sobre a comercialização de um ativo subjacente. No caso de uma opção de compra, o titular exerce sua opção ao comprar o ativo subjacente da contraparte do contrato de opção, também conhecido como o lançador da opção (ou simplesmente lançador). No caso de uma opção de venda, este direito é exercido ao se vender o ativo à contraparte do contrato de opção (lançador).
- **Strike:** o preço de Strike, ou simplesmente Strike, ou ainda preço de exercício, é o preço especificado no contrato de opção. Este é o preço exercido pelo titular da opção no momento do exercício. Nas equações ele costuma ser representado pela letra K .
- **Expiração:** a data de expiração é o momento em que o titular da opção deve decidir se vai exercer ou não o seu direito de compra ou venda do ativo subjacente. O tempo até a expiração do contrato de opção costuma ser representado por T .
- **Estilo de exercício:** Há basicamente 3 tipos de estilo de exercícios de opções:
 1. **Europeias:** estas opções só podem ser exercidas na data de expiração (instante T). São as mais comercializadas no mercado brasileiro.
 2. **Americanas:** são opções que podem ser exercidas à qualquer momento durante o prazo de expiração.
 3. **Bermudas:** este estilo de opções podem ser exercidas em datas predeterminadas, geralmente um dia em cada mês.

O presente trabalho concentrar-se-á no estudo das opções europeias, por serem as com maior liquidez na B3 (Brasil, Bolsa, Balcão).

2.2.2 Classificação

Outra classificação das opções é se são de compra (*Call*) ou de venda (*Put*). Uma call dá ao seu titular o direito de comprar o ativo subjacente por um preço predeterminado. Considere o seguinte exemplo: um investidor compra uma opção de compra europeia da empresa ABC com preço de Strike 30 BRL. Como trata-se de uma opção do tipo europeia, só pode ser exercida numa data específica. O valor da ação da empresa ABC no momento da compra é 31 BRL. Como o preço de strike da opção é inferior ao preço atual da ação, que é o ativo subjacente, diz-se que a opção está dentro do dinheiro (*In The Money*). Na data de exercício da call, tipicamente a terceira sexta-feira de cada mês no mercado brasileiro, a ação está sendo negociada na B3 por 28 BRL. Como a opção de compra dava o direito ao titular o direito de comprar a ação da empresa ABC por 30 BRL, não faz sentido exercer esta opção. Logo, o valor dela vai para zero e diz-se que ela virou pó. Neste caso, o investidor titular perdeu o valor pago pela opção (prêmio da opção) e o investidor que disponibilizou a opção no mercado (lançador da opção) embolsou o valor do prêmio pago.

Considere agora que a ação da empresa ABC está sendo negociado por 35 BRL no momento do exercício da opção. O titular da opção tem o direito de comprar a ação da empresa ABC por 30 BRL, que é o preço de strike, e vendê-la imediatamente por 35 BRL no mercado, auferindo desta forma um lucro de $5 \text{ BRL} = 35 \text{ BRL} - 30 \text{ BRL} = S_T - K$. Desta forma, o lançador da opção será obrigado a comprar a ação por 35 BRL e tomará o prejuízo.

As opções também podem estar relacionadas ao direito de venda do ativo subjacente e neste caso elas são denominadas opções de venda (*Put*). Para exemplificar, considere um investidor que comprou uma opção de venda da empresa BCD, a qual estava sendo negociada a 50 BRL no ato da compra da opção de venda. Considere que o preço de Strike seja $K = 48 \text{ BRL}$. Se no momento do exercício da put a ação negociada estiver sendo negociada a $S = 40 \text{ BRL}$ o titular da put pode comprar a ação no mercado por $S = 40 \text{ BRL}$ e vendê-la imediatamente à contraparte do contrato de put por $K = 48 \text{ BRL}$ e terá um lucro de $K - S = 48 \text{ BRL} - 40 \text{ BRL} = 8 \text{ BRL}$. O titular da put tem o direito, não a obrigação, de exercer a opção, todavia, a contraparte do contrato da opção (lançador da put) tem a obrigação de comprar a ação pelo preço de Strike, caso o titular queira exercê-la. Se, todavia, no momento do vencimento da opção a ação da empresa BCD estiver sendo negociada a $S = 55 \text{ BRL}$, então a *Put* perde seu valor, o titular perde o dinheiro investido e o lançador da *Put* embolsa o valor pago pelo investidor no ato da compra da opção. Note que as *Puts* funcionam como um seguro: caso a valor do ativo subjacente caia, o titular da opção pode vendê-lo por um valor predeterminado. Este é o

princípio dos seguros automotivos e dos planos de saúde. Pode-se entender que as opções de venda funcionam como uma ferramenta de proteção (*hedge*) dos ativos do proprietário. Para obter mais informações sobre estratégias de hedge usando opções de venda, consulte os trabalhos (ANDEREGG; ULMANN; SORNETTE, 2022; BOROCHIN; WU; ZHAO, 2021; BRIGATTO; FANZERES, 2022; CHI; LIU; CHANG, 2023; CHO; KIM; LEE, 2022; CHUNG; SHIH; TSAI, 2013; DANILIUK; ROZHKOVA, 2015; NIAN; COLEMAN; LI, 2021). Desta forma, pode-se perceber que há quatro possibilidades de posições em opções: comprado em opção de compra, comprado em opção de venda, vendido em opção de compra e vendido em opção de venda.

2.2.3 *Moneyness*

As opções elas ainda podem estar dentro do dinheiro (*ITM - In The Money*), no dinheiro (*ATM - At The Money*) ou fora do dinheiro (*OTM - Out Of the Money*). No caso das opções de compra, elas estão dentro do dinheiro que o preço da ação S é superior ao preço de *strike* K , estão no dinheiro se $S = K$ e estão fora do dinheiro se $S < K$. As *puts* funcionam de maneira inversa, caso $S < K$ a *put* está ITM, se $S = K$ ela está ATM e caso $S > K$, ela está fora do dinheiro. As opções devem ser exercidas se estiverem ITM. Esta classificação denomina-se *moneyness* e a Tabela 1 a seguir resume esta classificação (HULL, 2016):

	<i>Call</i>	<i>Put</i>
$S > K$	ITM	OTM
$S = K$	ATM	ATM
$S < K$	OTM	ITM

Tabela 1 – *Moneyness* da opções de compra e de venda.

Uma opção pode iniciar sua vida em um *moneyness* e ao longo do tempo mudar esta classificação, dependendo da flutuação de seu preço e da ação subjacente.

2.2.4 *Payoff*

Uma grandeza importante no cálculo dos preços de opções é o seu *payoff*, que pode ser definido como a diferença entre o preço de exercício da opção K e o valor da ação S . O cálculo do *payoff* depende do tipo de opção (se *call* ou *put*) e da posição nela (se comprado ou vendido) (AIUBE, 2013).

Considere um investidor que esteja comprado em uma opção de compra (posição *Long Call*) europeia, o seu *payoff* será dado por (LO., 2018):

$$\text{Long Call Payoff} = \begin{cases} S(T) - K, & \text{se } S(T) > K, \\ 0, & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} \quad (2.1)$$

$$= [S(T) - K]_+ \quad (2.2)$$

A Figura 1 representa o *payoff* de uma posição comprada numa opção de compra:

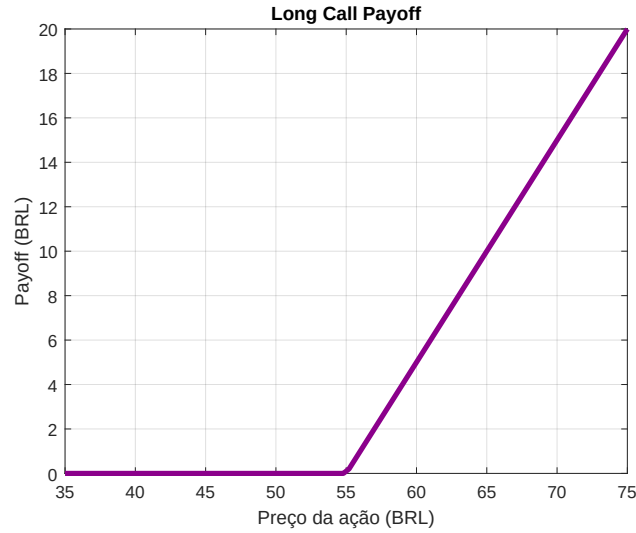


Figura 1 – Payoff de uma posição comprada numa opção de compra.

Um investidor que esteja comprado em uma opção de venda (posição *Long Put*) europeia, o seu *payoff* será dado por:

$$\text{Long Put Payoff} = \begin{cases} K - S(T), & \text{se } K > S(T), \\ 0, & \text{se } K \leq S(T) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$= [K - S(T)]_+ \quad (2.4)$$

A Figura 2 representa o *payoff* de uma posição comprada numa opção de venda:

Para um investidor que esteja vendido em uma opção de compra (posição *Short Call*) europeia, o seu *payoff* será dado por (LO., 2018):

$$\text{Short Call Payoff} = \begin{cases} S(T) - K, & \text{se } K < S(T), \\ 0, & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} \quad (2.5)$$

$$= [K - S(T)]_+ \quad (2.6)$$

A Figura 3 representa o *payoff* de uma posição vendida numa opção de compra:

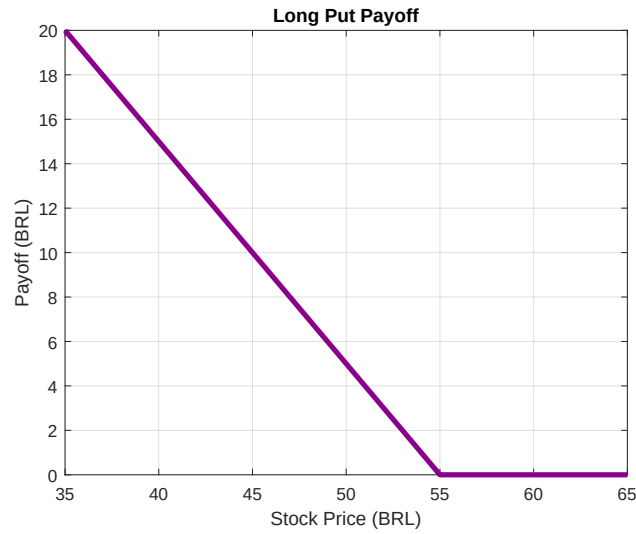


Figura 2 – Payoff de uma posição comprada numa opção de venda.

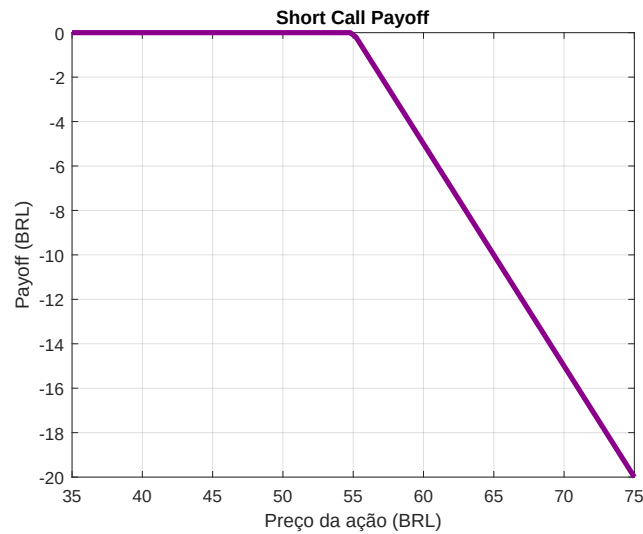


Figura 3 – Payoff de uma posição vendida numa opção de compra.

Agora considere um investidor que esteja vendido em uma opção de venda (posição *Short Put*) europeia, o seu *payoff* será dado por:

$$\text{Short Put Payoff} = \begin{cases} K - S(T), & \text{se } K > S(T), \\ 0, & \text{se } K \leq S(T) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$= [K - S(T)]_+ \quad (2.8)$$

A Figura 4 representa o *payoff* de uma posição vendida numa opção de venda:

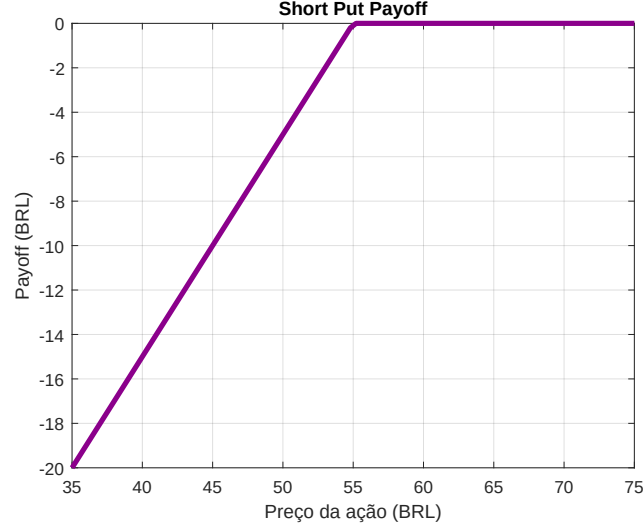


Figura 4 – Payoff de uma posição vendida numa opção de venda.

O grande questionamento no mercado de opções é: qual o valor justo (*fair value*) de uma opção?

2.3 Distribuição lognormal

Uma importante distribuição de probabilidade que aparece constantemente em finanças é a distribuição lognormal. Ela é comumente utilizada para modelar os preços de ações no mercado. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição lognormal com parâmetros μ e σ tem função densidade dada por (HULL, 2016):

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.9)$$

Se X segue distribuição lognormal, então $Y = \ln X$ segue distribuição normal com média μ e variância σ^2 . Simbolicamente: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A média e a variância da Distribuição Lognormal é dada pelas Equações 2.10 e 2.11, respectivamente, por:

$$\langle X \rangle = E[X] = E[\exp(Y)] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.10)$$

e

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\exp(Y)] = \exp(\mu + \sigma^2) \left[\exp(\sigma^2) - 1 \right]. \quad (2.11)$$

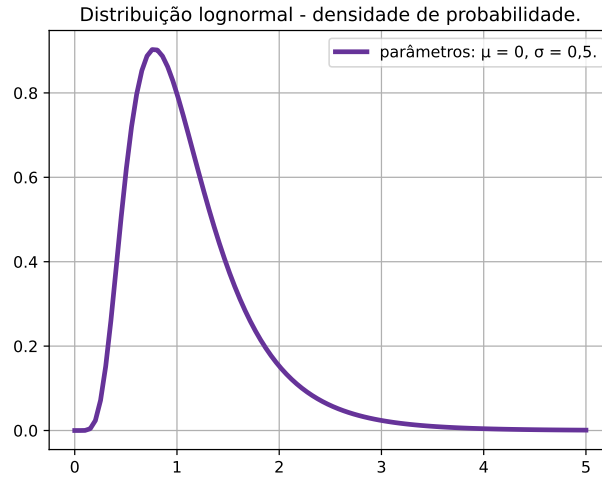


Figura 5 – Função densidade da distribuição Lognormal.

O modelo de comportamento dos preços das ações (*spot price*), S_T , usado por Black, Merton e Scholes pressupõe que as mudanças percentuais em S_T em um período de tempo bastante curto são lognormalmente distribuídas. Seja μ o retorno esperado sobre a ação por ano e seja σ a volatilidade do preço do ação por ano. Uma variável aleatória lognormal pode assumir qualquer valor entre zero e infinito. A Figura 5 ilustra o formato dessa distribuição. Diferentemente da distribuição normal, ela é assimétrica de modo que a média, mediana e moda sejam todas diferentes. Utilizando as Equações 2.10, 2.11 e as definições de μ e σ é possível demonstrar que:

$$\langle S_T \rangle = S_0 \exp(\mu T), \quad (2.12)$$

$$\text{Var}(S_T) = S_0^2 \exp(2\mu T) [\exp(\sigma^2 T) - 1]. \quad (2.13)$$

2.4 O Modelo de Black-Scholes

No início da década de 1970, Fischer Black, Myron Scholes e Robert C. Merton desenvolveram um modelo de precificação de opções europeias que ficou conhecido como modelo de Black-Scholes-Merton ou simplesmente Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973). O modelo de precificação de Black-Scholes é aplicado somente à opções do tipo europeias. Não há ainda um modelo analítico para a precificação de opções do tipo americanas; todavia, há diversos trabalhos nos quais são desenvolvidos modelos numéricos para a precificação de tais derivativos, como pode ser visto nos trabalhos de (SHEN;

HUANG; MA, 2023; YAN et al., 2022; SHASHIASHVILI, 2023; HUSSAIN et al., 2023; SHIRZADI et al., 2023; LI; WU, 2023; XIANG; WANG, 2022; HUANG et al., 2024; LEE; HA; KONG, 2024; BOIRE; REESOR; STENTOFT, 2023). Outra ideia por trás do modelo de Black-Scholes é que os retornos esperados, μ , exigido pelos investidores em uma ação depende do nível de risco da ação. Quanto maior o risco envolvido, maior o retorno esperado. O retorno também depende do nível das taxas de juros na economia: quanto maiores as taxas de juros, maior o retorno esperado exigido sobre uma ação.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (2.14)$$

onde f é o preço da opção, S é o *spot price*, r é a taxa de juros livre de risco, em particular, nós usamos a SELIC: 13,75% por ano (taxa que vigorou durante a coleta dos preços das opções estudadas neste documento) e σ é a volatilidade da ação.

A volatilidade, σ , de uma ação é uma medida da incerteza sobre os retornos oferecidos por ela. Há diversas formas de se calcular a volatilidade de uma ação, constituindo assim, um ramo da pesquisa em Econofísica e Econometria (COOK; LUO, 2023; PELLEGRINO; COSTANTINO; TAURO, 2019; DAGLIS et al., 2020; SONG et al., 2024; MOHSIN; JAMAANI, 2023; LU et al., 2023; YANG et al., 2022; LIN et al., 2022; CHEN; ZHENG; HAO, 2022).

A solução da Equação 2.14 são as fórmulas de Black-Scholes-Merton para a precificação de uma *Call* (c) e de uma *Put* (p) europeias. As fórmulas são:

$$c = S_0 N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2) \quad (2.15)$$

e

$$p = K \exp(-rT) N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.16)$$

onde:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases} . \quad (2.17)$$

O termo $N(d_2)$ nas Equações 2.37 e 2.16 é a probabilidade de que uma opção de compra será exercida em um mundo neutro ao risco.

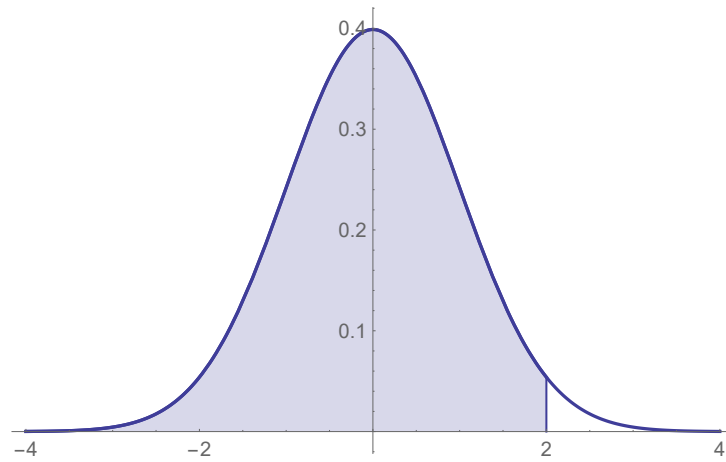


Figura 6 – A área sombreada representa $N(x = 2)$.

No modelo de Black-Merton-Scholes é utilizada a capitalização contínua:

2.4.1 Capitalização contínua

Sejam PV e FV , respectivamente o capital inicial (Present Value - PV) e o capital (*Future Value* - FV) ao fim de um período. Se aplica-se capitalização anual, a taxa de rentabilidade, R_a resultaria da resolução da equação (NICOLAU, 2012):

$$FV = PV(1 + R_a). \quad (2.18)$$

Aplicando 100 BRL a uma taxa de 10% a.a. durante um ano: $FV = 100(1 + 0,1) = 110$ BRL. Quando a taxa de juros é mensurada com capitalização semestral, isso significa que $R_s = 5\%$ (onde R_s é a taxa de capitalização semestral) são obtidos a cada 6 meses (0,5 ano), com os juros sendo reinvestidos. Nesse caso, os 100 BRL crescem para $100 \times 1,05 \times 1,05 = 110,25$ BRL; ou

$$FV = PV \left(1 + \frac{R_s}{2}\right)^2 . \quad (2.19)$$

Se a taxa de juros for mensurada com capitalização trimestral, significa dizer que $R_{tr} = 2,5\%$ (onde R_{tr} é a taxa de capitalização trimestral) são obtidos a cada três meses, com os juros sendo reinvestidos. Logo, os 100 BRL crescem para $100 \times 1,025^4 = 110,38$ BRL. De maneira algébrica, temos:

$$FV = PV \left(1 + \frac{R_{tr}}{4} \right)^4. \quad (2.20)$$

Se a capitalização é contínua (capitalização minuto a minuto, segundo a segundo, etc) então o capital FV pode interpretar-se como o limite de

$$FV = \lim_{n \rightarrow \infty} PV \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n. \quad (2.21)$$

Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = e. \quad (2.22)$$

Logo, para generalizar nossos resultados, considere um capital inicial PV investido por T anos a uma taxa de juros R por ano, o valor final do investimento é

$$FV = PV(1 + R)^T. \quad (2.23)$$

Se a taxa é composta m vezes por ano, o valor final do investimento é

$$FV = PV \left(1 + \frac{R}{m} \right)^{Tm}. \quad (2.24)$$

Quando $m = 1$, a taxa também é chamada de *taxa de juros anual equivalente* (HULL, 2016). Com capitalização contínua, o valor PV investido por T anos à taxa r cresce até

$$FV = PV \exp(rT). \quad (2.25)$$

Desta forma, o termo que aparece nas Equações 2.37 e 2.16 representa um desconto sobre o preço de strike K . Dito de outra forma, o valor K é preço que o titular da opção exercerá numa data futura, caso a opção esteja dentro do dinheiro (*ITM*). Como o dinheiro muda seu valor com o decorrer do tempo, o valor K da data de expiração da opção não tem o mesmo valor hoje. Para descobrir qual o valor de K hoje, aplica-se um desconto em capitalização contínua: $K \exp(-rT)$.

2.5 A equação do calor e o modelo de Black-Scholes

2.5.1 A equação do calor

A mais geral **Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda Ordem** é dada por (BASSALO; CATTANI, 2011):

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + F(x, t)u = G(x, t). \quad (2.26)$$

A Equação 2.26 segue a seguinte classificação (para qualquer ponto (x, t) no domínio de $u(x, t)$):

Hiperbólica	$B^2 - 4AC > 0$
Parabólica	$B^2 - 4AC = 0$
Elíptica	$B^2 - 4AC < 0$

Tabela 2 – Classificação da Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem.

Como exemplo, podemos citar a *Equação de Fourier* ou da *Condução de Calor* (IÓRIO, 2011):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.27)$$

onde $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante. Em dimensões maiores, a Equação de Fourier fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad (2.28)$$

onde $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e Δ é o laplaciano em $\mathbb{R}^n$ (para variáveis espaciais $x_1, \dots, x_n$). A Equação 2.27 é parabólica, pois $A = 1$, $B = C = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0$.

Há pesquisas sobre a resolução da equação de Black-Scholes, como pode ser visto nos trabalhos de (MOHAMMADIZADEH et al., 2023; PATSIUK; KOVALENKO, 2018; ARABAS; FARHAT, 2020; RASHIDI; HEJAZI; MOHAMMADIZADEH, 2022; CHOI; CHOI, 2018; WANG; YUAN, 2019; RAO; MANISHA, 2018). No presente documento, a equação de Black-Scholes foi transformada na equação de Fourier e depois resolvida.

2.5.2 Transformando a equação de Black-Scholes na equação do calor

Para transformar a Equação Diferencial de Black-Scholes (2.14) na Equação de Fourier (2.27), devemos, primeiramente fazer uma mudança de notação: escrevemos que o

preço da opção será $c = c(S_t, t | \sigma, K, r)$, uma vez que o valor justo de uma opção é função do preço do ativo (S_t), do tempo (t) até a maturidade da opção e o terno (σ, K, r) são os parâmetros: volatilidade σ do ativo, o preço de *Strike* K e a taxa de juros livre de risco (r). Esses parâmetros são mantidos constantes durante o intervalo de tempo das opções estudadas. A volatilidade é usada neste texto é definida como o desvio padrão da série de preços de opções desde seu lançamento até a data de expiração. O preço de *Strike* (K) é fixado no lançamento da opção no mercado e também não pode ser alterado ao longo do tempo. A taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) é fixada pelo Comitê de Políticas Monetárias (COPOM) a cada 90 dias e durante a coleta das séries de preços das opções usadas no presente documento a referida taxa não sofreu alterações, permanecendo constante e igual a 13,75%. Para facilitar a notação, escreveremos $S_t = s$, destacando a diferença entre a variável aleatória S_t e o valor assumido por ela s . Logo, escrevemos $c = c(s, t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = rc, \quad (2.29)$$

onde $S \geq 0$ e $0 \leq t \leq T$.

Agora, tomemos as seguintes condições de contorno:

- Se o valor da empresa zero, ou seja, $S_t = 0$, todos os preços subsequentes também são iguais a zero. Isso pode ser compreendido como uma barreira de absorção do Processo Geométrico Browniano. Matematicamente podemos escrever que $\lim_{S_t \rightarrow 0}$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} c(s, t) = 0, \quad (2.30)$$

$t \in [0, T)$.

- Se o valor da empresa cresce indefinidamente, o mesmo ocorre com o preço da opção, matematicamente:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(s, t) = s, \quad (2.31)$$

$t \in [0, T)$.

- a condição terminal, ou seja, a data da maturidade da opção ($t \rightarrow T$) é dada por

$$\lim_{t \rightarrow T} c(s, t) = [S(T) - K]_+, \quad (2.32)$$

conforme a Equação 2.2.

A primeira mudança de variáveis a ser realizada transformará $c(s, t)$ em $f(x, \tau)$, onde τ é o tempo remanescente para a maturidade da opção, será (AIUBE, 2013):

$$s = K \exp(x), \quad (2.33)$$

onde $-\infty < x < \infty$ e K é uma fator de escala que será eliminado. Tomando a derivada:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{K} \exp(-x) \quad (2.34)$$

Essa será a definição de τ para estas transformações matemáticas:

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t), \quad (2.35)$$

onde $0 \leq t < T$ e $0 < \tau \leq \frac{1}{2} \sigma^2 T$.

Tomando a derivada da equação 2.35:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2} \sigma^2. \quad (2.36)$$

Agora definiremos uma função $f(x, \tau)$ que mapeará a $c(s, t)$:

$$c(s, t) = K f(x, \tau). \quad (2.37)$$

Onde o fator de escala K (preço de *Strike* da opção) será eliminado em passagens futuras. Para reescrevermos a equação de Black-Scholes, precisaremos calcular as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2 K \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial c}{\partial s} = -\exp(-x) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = -\frac{\exp(-x)}{K} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\exp(-x)}{K} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (2.40)$$

Fazendo $r = k \frac{\sigma^2}{2}$ e utilizando as equações 2.38, 2.39 e 2.40 obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (K - 1)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau} - kf = 0. \quad (2.41)$$

Agora utilizaremos a seguinte condição de contorno:

$$c(s, T) = Kf(x, 0) = K \max[\exp(x) - 1, 0]. \quad (2.42)$$

Logo,

$$f(x, 0) = [\exp(x) - 1]_+. \quad (2.43)$$

Agora precisaremos de outra transformação:

$$f(x, \tau) = \exp(\alpha x + \beta \tau)u(x, \tau). \quad (2.44)$$

A condição de contorno em termos de u :

$$u(x, 0) = \exp(-\alpha x)f(x, 0). \quad (2.45)$$

Precisaremos calcular novamente as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \exp(\alpha x + \beta \tau) \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(\alpha x + \beta \tau) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \exp(\alpha x + \beta \tau) \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (2.48)$$

Inserindo as equações 2.46, 2.48 e 2.48 na equação 2.41, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + [(\alpha + k)(\alpha - 1) - \beta]u. \quad (2.49)$$

Impondo a condição de que os coeficientes dos dois últimos termos do segundo membro são nulos, obtemos:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k - 1), \quad (2.50)$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k + 1)^2. \quad (2.51)$$

Agora podemos escrever:

$$f(x, \tau) = \exp \left[\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau \right] u(x, \tau). \quad (2.52)$$

Podemos reescrever o problema da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.53)$$

$$u(x, 0) = \max \left\{ \exp \left[\frac{1}{2}(k+1)x \right] - \exp \left[\frac{1}{2}(k-1)x \right], 0 \right\}. \quad (2.54)$$

onde $-\infty < x < \infty$ e $\tau > 0$.

Ou seja, o problema descrito em 2.53 é a clássica equação de difusão do calor. Esta foi a equação resolvida pela rede neural neste trabalho. No mundo real, temos o preço das opções (c) em BRL (Reais) e a rede resolve a equação de Fourier utilizando um preço generalizado (u), cuja unidade é uma unidade arbitrária. A relação entre c e u pode ser obtida através das equações 2.37 e 2.52 (AIUBE, 2013):

$$c(s, t) = K \exp \left[\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau \right] u(x, \tau). \quad (2.55)$$

Com a Equação 2.55 é possível tomar o preço generalizado, oriundo da resolução da NN e transformá-lo no preço real da opção, medido em BRL.

2.6 Redes Neurais

Na tentativa de simular processos de aprendizagem de máquina, o cérebro humano se mostrou como um modelo natural que inspirou diversas pesquisas. Os neurônios são células relativamente simples que trocam informações por meio de sinapses. Cada um desses neurônios está conectado a vários outros, o que permite muitos atuarem em paralelo e isso é responsável pelo funcionamento do cérebro (FACELI et al., 2023).

O presente texto apresenta a solução da equação de Fourier através de uma Rede Neural Artificial (ANN - *Artificial Neural Network*) ou simplesmente Rede Neural (NN - *Neural Network*). Neste texto utilizaremos a última nomenclatura.

As NN são sistemas computacionais distribuídos compostos de neurônios artificiais (também conhecidas como unidades de processamento simples) densamente interconectadas que computam funções matemáticas (FACELI et al., 2023). Segundo (HAYKIN, 2001):

Uma Rede Neural (NN) pode ser entendida como um grafo orientado que possui elos sinápticos e de ativação. Uma rede neural (NN) tem quatro propriedades:

1. Cada neurônio da rede apresenta um conjunto de elos sinápticos lineares, um *bias* aplicado externamente (coeficiente linear) a uma entrada fixa em +1 e um elo de ativação tipicamente não linear.
2. Os sinais de entrada nos elos sinápticos são ponderados pelos elos sinápticos.
3. A soma ponderada dos sinais de entrada define o campo local induzido do neurônio em questão.
4. Para produzir a saída do neurônio, o campo local induzido pelo neurônio é limitado pelo elo de ativação.

2.6.1 O neurônio

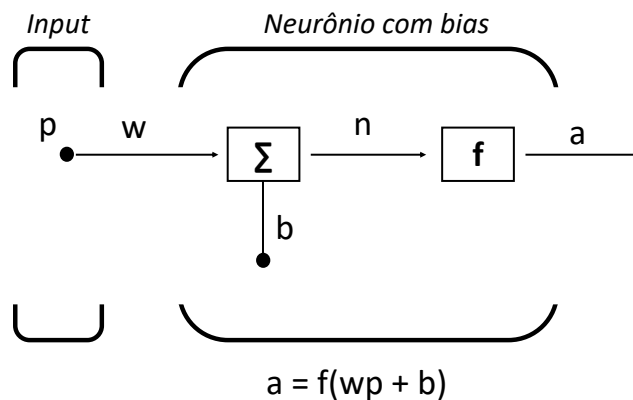


Figura 7 – Diagrama de um neurônio.

Fonte: autoria própria.

A entrada do neurônio é o escalar p o qual é transmitido através de uma conexão que multiplica sua força pelo peso escalar w , para formar o produto wp , também um escalar. Em seguida é adicionado um *bias* escalar b , deslocando a função para a esquerda. O *bias* é muito parecido com um peso escalar, a não ser pelo fato de ser constante e igual a 1. A entrada ponderada $wp + b$ é o argumento da função de transferência (ou função de ativação) f (DEMUTH; BEALE, 2004).

Essas características podem ser descritas de maneira mais aprimorada por uma função não-linear. Uma transformação afim com parâmetros de aprendizagem é usada

pela maioria das redes neurais, que são então seguidas por uma função fixa, não-linear conhecida como função de ativação ou função de transferência. Essas funções são aplicadas a cada neurônio na rede neural e introduzem não-linearidades no modelo. As funções de transferência permitem que a rede neural aprenda a representar relações complexas nos dados de entrada (GOODFELLOW; BENGIO; COURVILLE, 2016).

2.6.2 Uma camada de neurônios

Dois ou mais neurônios como os representados na Figura 7 podem ser combinados em uma estrutura denominada camada de neurônios, e uma rede específica pode conter uma ou mais dessas camadas. Primeiro considere uma única camada de neurônios como representado na Figura 8:

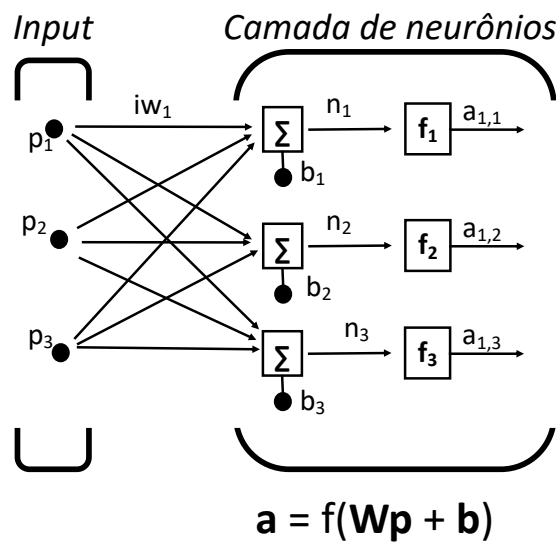


Figura 8 – Diagrama de uma camada de neurônios.

Fonte: autoria própria.

Nesta rede, cada elemento do vetor de entrada $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ é conectado a cada entrada de neurônio através de uma matriz de pesos $\mathbf{W}$, exibida na Equação 2.56. Nesta matriz, as colunas representam os elementos do vetor de entrada $\mathbf{p}$ e as linhas representam os neurônios da camada. No presente exemplo, temos 3 elementos no vetor $\mathbf{p}$ e temos 3 neurônios de entrada, resultando numa matriz 3×3 . O i -ésimo neurônio recebe o produto interno $\mathbf{p} \cdot \mathbf{W}$ e é acrescido do *bias* b_i (o conjunto de *bias* forma o vetor $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$). O resultado dessa operação é o escalar n_i ($\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$). Ao aplicar n_i à função de transferência f obtemos a saída da rede: o escalar a_i , que constituem o valor de saída $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. A expressão matemática é mostrada parte inferior da Figura 8.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

De maneira geral, considere um vetor de entrada com R entradas $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_R\}$ e uma rede constituída por S neurônios. A matriz de pesos $\mathbf{W}_{\text{gen}}$ é dada por (DEMUTH; BEALE, 2004):

$$\mathbf{W}_{\text{gen}} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{S,1} & w_{S,2} & \dots & w_{S,R} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Para facilitar a visualização, vamos construir um diagrama de camada de rede neural resumido na Figura 9:

Na Figura 9 a matriz de pesos $\mathbf{W}_{\text{gen}}$ tem dimensões $S \times R$. Como definido anteriormente, uma camada de neurônios é constituída pela matriz de pesos, as operações de multiplicação (produto interno), o vetor de *bias* $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_S\}$ e as funções de transferência $\mathbf{f}$. Após as entradas do vetor $\mathbf{p}$ serem aplicadas à matriz peso e adicionado o *bias* da respectiva entrada i , b_i , é gerado o vetor $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_S\}$, o qual será aplicado à função de transferência $\mathbf{f}$. A saída da rede será o vetor $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_S\}$.

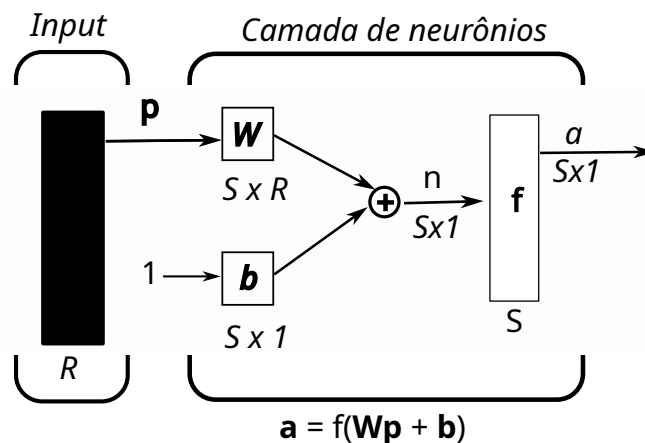


Figura 9 – Diagrama resumido de uma camada de neurônios.

Fonte: autoria própria.

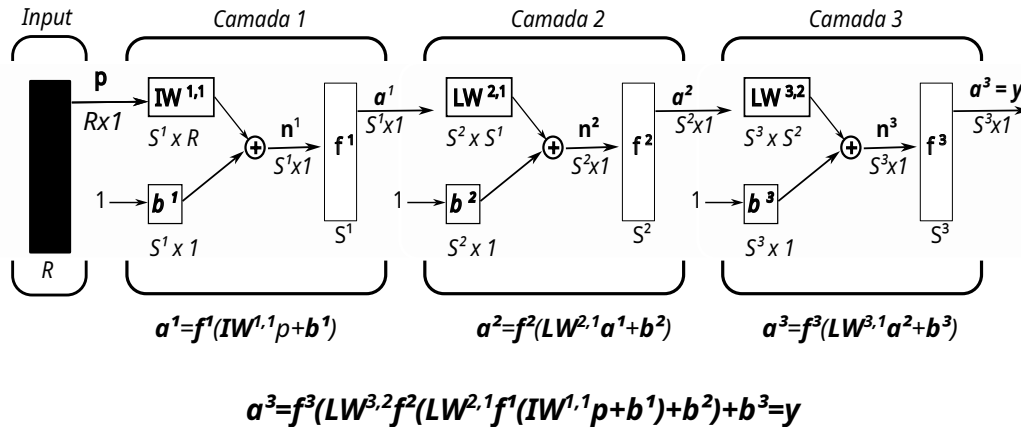


Figura 10 – Diagrama resumido de três camadas de neurônios.

Fonte: autoria própria.

2.6.3 Multi Layer Perceptron

A Figura 10 apresenta um diagrama resumido para uma Rede Neural com três camadas. Os pesos das camadas são representados por *IW* (*Input Weights*), ou seja, os pesos da camada de entrada; e por *LW* (*Layer Weights*): pesos das camadas intermediárias (ocultas).

A metodologia mais utilizada no treinamento de NN é o de Propagação Retroativa do Erro (*Error Backpropagation*) ou simplesmente *Backpropagation*. Trata-se de um método de aprendizagem supervisionado, no qual o ajuste dos pesos sinápticos é realizado de forma a minimizar o erro total das saídas da NN. O principal objetivo desta metodologia é ajustar esses pesos sinápticos da NN durante o treinamento com base em um conjunto de pares de entrada-saída. Esses pares são denominados padrões de aprendizagem (FILHO, 2023). Para que esse algoritmo pode ser utilizado a função de ativação precisa ser contínua, diferenciável e, de preferência, não decrescente. Para mais detalhes sobre *Backpropagation* ver (GOODFELLOW; BENGIO; COURVILLE, 2016).

3 Objetivos

3.1 Objetivo Geral

Estudar metodologias de resolução da Equação de Black-Scholes, Equações Diferenciais Parciais Parabólicas, por meio de redes neurais e utilizar essas metodologias para a previsão de séries temporais contínuas.

3.2 Objetivos Específicos

- Estudar o funcionamento das opções europeias.
- Modificar a equação de Black-Scholes (Equação Diferencial Estocástica) para transformá-la na equação do calor (Equação Diferencial Parcial Parabólica de Segunda Ordem).
- Implementar uma rede neural utilizando os pacotes: Torch e Neurodiffeq. Essa rede resolverá a equação diferencial proposta.
- Coletar séries de preços de opções europeias disponíveis na B3 (Brasil, Bolsa, Balcão).
- Resolver a equação do calor equivalente à equação de Black-Scholes e comparar com os dados obtidos do mercado brasileiro.
- Avaliar o desempenho da rede neural através de medidas estatísticas.

4 Metodologia

4.1 Sobre os dados

Neste trabalho foram utilizados preços de opções de compra (*calls*) sobre as ações preferenciais de Petrobras (PETR4) e sobre ações ordinárias de Vale (VALE3). As cotações diárias das ações podem ser obtidas gratuitamente no site do Yahoo Finance ¹.

No mercado brasileiro são comercializadas opções de compra e venda europeias e opções de compra americanas. Não há comercialização de *puts* americanas. As cotações diárias das opções também podem ser obtidas gratuitamente no site da ADVFN ². Estes dados apresentam uma particularidade em sua disponibilidade: a data padrão para o exercício das opções no mercado brasileiro é a terceira quinta-feira de cada mês. Na época da aquisição dos dados deste texto, só era possível visualizar as séries até a quinta-feira à noite e o preço que aparecia era o da quarta-feira. Por volta das 19:00 da quinta-feira anterior ao vencimento da série de opções, os preços eram retirados do ar. Portanto, para realizar a aquisição dos dados desta tese, era necessário realizar a coleta na quinta-feira anterior ao vencimento da opção até o início da noite.

As opções são nomeadas da seguinte maneira: os primeiros quatro caracteres informam o ativo, o quinto caractere informa se é uma opção de compra ou venda e a data de seu vencimento. Ainda há 2 ou 3 caracteres numéricos para a identificação da opção. Por exemplo: a opção VALED655 é uma opção de compra sobre a ação ordinária VALE3 cujo valor de *Strike* é $K = 66,97$ BRL. A letra D indica que é uma *call* com vencimento em abril (MOLERO; MELLO, 2020).

No mercado brasileiro, as opções tem vencimento mensal, normalmente na terceira sexta-feira de cada mês, embora esta data possa variar. A Tabela 3 mostra a organização dos vencimentos das opções no mercado brasileiro:

A escolha pelas opções sobre Petrobras e Vale se deve ao alto volume de negociação envolvendo os derivativos sobre essas empresas, possibilitando assim a obtenção de séries de preços mais longas e melhorando o treinamento da NN.

¹ <https://finance.yahoo.com>

² <https://br.advfn.com/>

Tabela 3 – Vencimentos da séries de opções no mercado brasileiro.

MÊS	CALL	PUT
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maio	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

4.2 Sobre a NN

Foi utilizada uma rede neural (NN) Multi Layer Perceptron (MLP) implementada em uma biblioteca denominada Neurodiffee (CHEN et al., 2020), escrita em linguagem Python 3. A NN foi treinada por 30000 épocas na primeira etapa do trabalho, onde foi verificada a capacidade de aprendizado da rede. Na segunda etapa, quando foi avaliada a capacidade de previsibilidade da NN, esta foi treinada por 60000 épocas. Foram utilizadas duas camadas ocultas, cada uma com 32 neurônios. Foram utilizadas duas variáveis de entrada: τ (Equação 2.35) e x (Equação 2.33) e a saída da rede foi $u(\tau, x)$, um preço de opção generalizado.

Trata-se de um problema de aprendizado supervisionado, no qual a resposta correta é dada pela equação diferencial dada pela Equação 2.27. As condições de contorno foram dadas pelos preços reais das opções sobre as ações preferenciais de Petrobras (PETR4) com vencimento em janeiro (PETRA) e abril (PETRD). Também foram utilizadas as opções de compra sobre as ações ordinárias da VALE (VALE3) com vencimento em abril (VALED). Essas opções foram obtidas gratuitamente no site a ADVFN ³. Na primeira etapa do experimento essas séries foram utilizadas para avaliar a capacidade de aprendizado da NN, não havendo tentativa de previsão. Na segunda etapa do trabalho, essas mesmas séries foram utilizadas para tentar avaliar a capacidade de previsão da NN. Nas duas etapas também foi inserida o gráfico exibindo a solução analítica de Black-Scholes para efeito de comparação com os métodos numéricos apresentados.

A função de ativação utilizada foi a Tangente Hiperbólica:

³ <http://https://br.advfn.com/>

$$\tanh(x) = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}. \quad (4.1)$$

O gráfico da Tangente Hiperbólica é exibido na Figura 11:

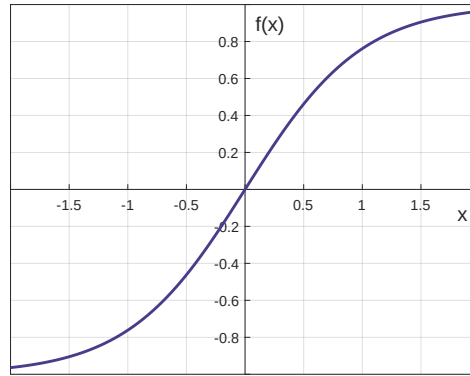


Figura 11 – Tangente Hiperbólica. **Fonte:** autoria própria.

O domínio da função tangente hiperbólica é $(-\infty, \infty)$, contradomínio $(-1, 1)$ e apresenta assíntotas horizontais em $y = -1$ e $y = 1$.

4.2.1 Como a NN resolve uma Equação Diferencial

A resolução de uma Equação Diferencial através de uma NN pode ser encarado como um problema de otimização. Seja $\mathcal{D}(\cdot)$ um operador diferencial e seja u uma possível solução de $\mathcal{D}(\cdot)$. Agora considere uma Equação Diferencial na forma

$$\mathcal{D}(u) - \mathcal{F} = 0. \quad (4.2)$$

onde $\mathcal{F}$ é conhecida como Função Força. Em Física esta função pode ser entendida como um termo de fonte ou de sumidouro.

Seja $\hat{u}$ a saída da NN se $\hat{u}$ é uma solução trivial da Equação Diferencial $\mathcal{D}(\cdot)$, então o resído $\mathcal{R}(\hat{u})$ é dado por:

$$\mathcal{R}(\hat{u}) = \mathcal{D}(\hat{u}) - \mathcal{F}. \quad (4.3)$$

Desta forma, uma NN pode ser treinada para otimizar a solução $\hat{u}$ com uma função perda dada pela Equação 4.3. Portanto, resolver uma Equação Diferencial é um problema de minimização.

Para garantir que as condições iniciais sejam satisfeitas, a função $\hat{u}$ pode ser substituída pela solução modificada $\tilde{u}$. Por exemplo, se é dada uma Equação Diferencial no espaço x e no tempo t com condições iniciais em $t = t_0$ dadas pela função $u_{t_0}(x)$, a solução pode ser escrita como

$$\tilde{u}(x, t) = u_{t_0}(x) + [1 - e^{-(t-t_0)}] \hat{u}(x, t). \quad (4.4)$$

De maneira geral, outras condições iniciais podem ser implementadas na forma

$$\tilde{u}(x, t) = A(x, t; x_{boundary}, t_0) \hat{u}(x, t) \quad (4.5)$$

onde $A(x, t; x_{boundary}, t_0)$ é selecionada de forma que $\tilde{u}(x, t)$ tenha as condições iniciais e de contorno corretas. Todas essas condições estão implementadas na biblioteca Neurodiffeq (CHEN et al., 2020).

No presente trabalho, a NN gera o conjunto de dados a cada época de treinamento, ou seja, o *target* é dado pela resolução da Equação do Calor (Equação eq:GeneralHeatEquation) e as Condições de Contorno são dadas pelas séries de preços praticadas no mercado de derivativos. Cada vez que a Equação Diferencial é resolvida, é gerado um novo conjunto de dados. Ou seja, é possível gerar infinitos conjuntos de dados de treinamento.

4.2.2 Aprendizado da rede

Este trabalho foi dividido em duas etapas, na primeira foi avaliada apenas o aprendizado da NN e na segunda foi testada a capacidade de previsão da NN.

Na primeira etapa foram utilizadas as séries completas de preços para treinar a NN. Como foram utilizados preços generalizados (x e u) e a medida de tempo generalizada (τ), foi necessário transformar para as unidades que utilizamos no mercado (BRL e dias). Isso foi feito utilizando a Equação 2.55. Esses resultados serão exibidos nas tabelas 4, 5 e 6 no Capítulo 5.

Na segunda etapa as séries de preços foram divididas em 2 conjuntos: treinamento e teste. As janelas de previsão foram de 1 dia, 5 dias e 10 dias. Assim como na primeira etapa, foi necessário transformar os preços generalizados em preços reais e os resultados podem ser vistos nas tabelas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 no Capítulo 5. Para avaliar o desempenho da NN foram utilizadas as métricas de erro apresentadas na Seção 4.3.

4.3 Métricas de erro

4.3.1 Erro Médio Absoluto (MAE)

O MAE (*Mean Absolute Error*) é uma medida de erros entre pares de observações. É calculado como o valor absoluto da diferença entre os valores reais (Y_i) e os valores estimados ($\hat{Y}_i$), sobre o tamanho da amostra. Tal como acontece com outras medidas de erro, quanto mais perto de zero, menor o erro da estimativa e melhor o desempenho do modelo.

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Y_i - \hat{Y}_i| \quad (4.6)$$

4.3.2 Erro médio quadrado (MSE)

O MSE (*Mean Square Error*) é a distância euclidiana dos quadrados dos erros. É a diferença quadrada entre os valores reais (Y_i) e os valores estimados ($\hat{Y}_i$). Uma vez que as diferenças são quadradas, isso sempre resulta em valores positivos. Quanto mais próximo o MSE estiver do zero, menor será o erro associado às medições.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (4.7)$$

4.3.3 Erro percentual médio absoluto (MAPE)

É também uma medida de precisão. O MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) é a diferença entre os valores estimados ($\hat{Y}_i$) e os valores reais (Y_i), divididos pelo valor real, no módulo. A soma destas proporções é dividida pelo tamanho da amostra. Quanto mais perto de zero, menor o erro da estimativa.

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right| \quad (4.8)$$

4.3.4 Previsão de Mudança de Direção (POCID)

Ao prever se o valor da série irá aumentar ou diminuir nas próximas etapas do tempo, o indicador Previsão de Mudança de Direção (POCID - *Prediction of Change in Direction*) é uma medida que permite uma contabilização do número de decisões precisas. Matematicamente (FERREIRA; VASCONCELOS; ADEODATO, 2008):

$$POCID = 100 \frac{\sum_{i=1}^N D_i}{N} \quad (4.9)$$

onde

$$D_i = \begin{cases} 1, & \text{if } (Y_i - Y_{i-1}) \times (\hat{Y}_i - \hat{Y}_{i-1}) > 0 \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad (4.10)$$

O valor do POCID pode variar de 0 a 100%, onde o modelo perfeito atinge o valor de 100

4.3.5 Variância Média Relativa (ARV)

A última medida de avaliação relevante é a Variância Média Relativa (ARV - *Average Relative Variance*) ([FERREIRA; VASCONCELOS; ADEODATO, 2008](#)):

$$ARV = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2} \quad (4.11)$$

onde N , Y e $\hat{Y}$ são os mesmos parâmetros das outras medidas de avaliação, e o $\bar{Y}$ é a média da série temporal. Quando o valor ARV é igual a 1 (um), o predictor executado comporta-se como se fosse a média da série; quando o valor é maior do que 1 (um), usar o predictor é pior do que usar a média da série temporal; e quando o ARV é menor do que 1 (um), o predictor realiza uma estimativa melhor do que a média. Portanto, o predictor tende a ser o modelo ideal quando o ARV diminui para zero e é útil se o valor do ARV é menor que 1.

5 Resultados

Neste capítulo são analisados os resultados obtidos. Foram analisadas três séries de preços de opções: PETRA (opções de compra sobre PETR4 com vencimento em janeiro de 2023), PETRD (opções de compra sobre PETR4 com vencimento em abril de 2023) e VALED (opções de compra sobre VALE3 com vencimento em abril de 2023). Os custos operacionais foram desprezados nas análises realizadas. Nos gráficos a serem exibidos também foi apresentada a solução analítica de Black-Scholes (BLS).

5.1 Aprendizado da NN

5.1.1 PETRA

Para as *calls* sobre PETR4 com vencimento em janeiro de 2023 foram tomadas 12 séries de opções. A Tabela 4 exibe as métricas de erro entre os valores calculados pela NN e os valores de mercado das respectivas opções. As métricas de erro calculadas foram o *MAE*, *MSE*, *MAPE*, *POCID* e *ARV*, as quais foram definidas no Capítulo 4. A Tabela 4 também exibe o tamanho *N* da série de preços e os respectivos preços de *Strike* *K*, em BRL.

Tabela 4 – Erros Estatísticos para Rede Neural (NN) MLP das Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série A para PETR4. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

PETRA	K (BRL)	MAE	MSE	MAPE	POCID	ARV	N
332	24,76	0,980	1,295	1,257	75,000	0,004	61
357	26,26	1,145	1,641	2,590	77,358	0,023	54
356	25,76	1,345	2,064	2,733	82,353	0,020	52
366	26,76	1,141	2,337	2,114	71,667	0,020	61
342	25,26	1,530	2,706	2,357	84,314	0,019	52
266	17,76	5,749	37,778	0,800	53,333	0,013	61
391	22,76	1,179	1,888	0,528	78,333	0,003	61
321	22,26	1,670	4,563	0,533	71,667	0,006	61
282	18,76	6,231	42,81	1,084	72,340	0,019	48
53	15,26	2,800	10,538	0,598	46,154	0,023	40
108	13,76	8,418	73,457	0,820	72,414	0,032	30
362	27,26	1,011	1,942	2,163	68,333	0,020	61

Nesta etapa do experimento estamos interessados em avaliar a capacidade da NN em modelar os dados e comparar tais resultados com a solução analítica da Equação de Black-Scholes, Equação 2.37. Como pode-se observar, a *call* PETRA332 ($K = 24,76$ BRL) apresentou os menores valores de MAE e MSE (0,980 e 1,295, respectivamente) sendo a melhor em dois critérios, todavia, a opção PETRA391 ($K = 22,76$ BRL) apresentou os menores valores de MAPE e ARV (0,528 e 0,003, respectivamente), também sendo a melhor em dois critérios. Por conta disso, os seus gráficos são exibidos nas Figuras 12a e 12b, respectivamente. Ao observar os gráficos, pode-se verificar que a modelagem de PETRA332 está ligeiramente mais próxima dos valores reais da opção (curva azul). Escolhemos o MSE como a principal métrica de erro para critérios de desempate de desempenho entre os dados. O pior caso apresentado pela NN foi o de PETRA108 ($K = 13,76$ BRL), a qual apresentou o valor mais alto de MSE (73,457). A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) seguiu praticamente os mesmos valores do preço da ação subjacente: PETR4 (curva roxa), convergindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos pontos mais próximos ao vencimento deste conjunto de *calls*.

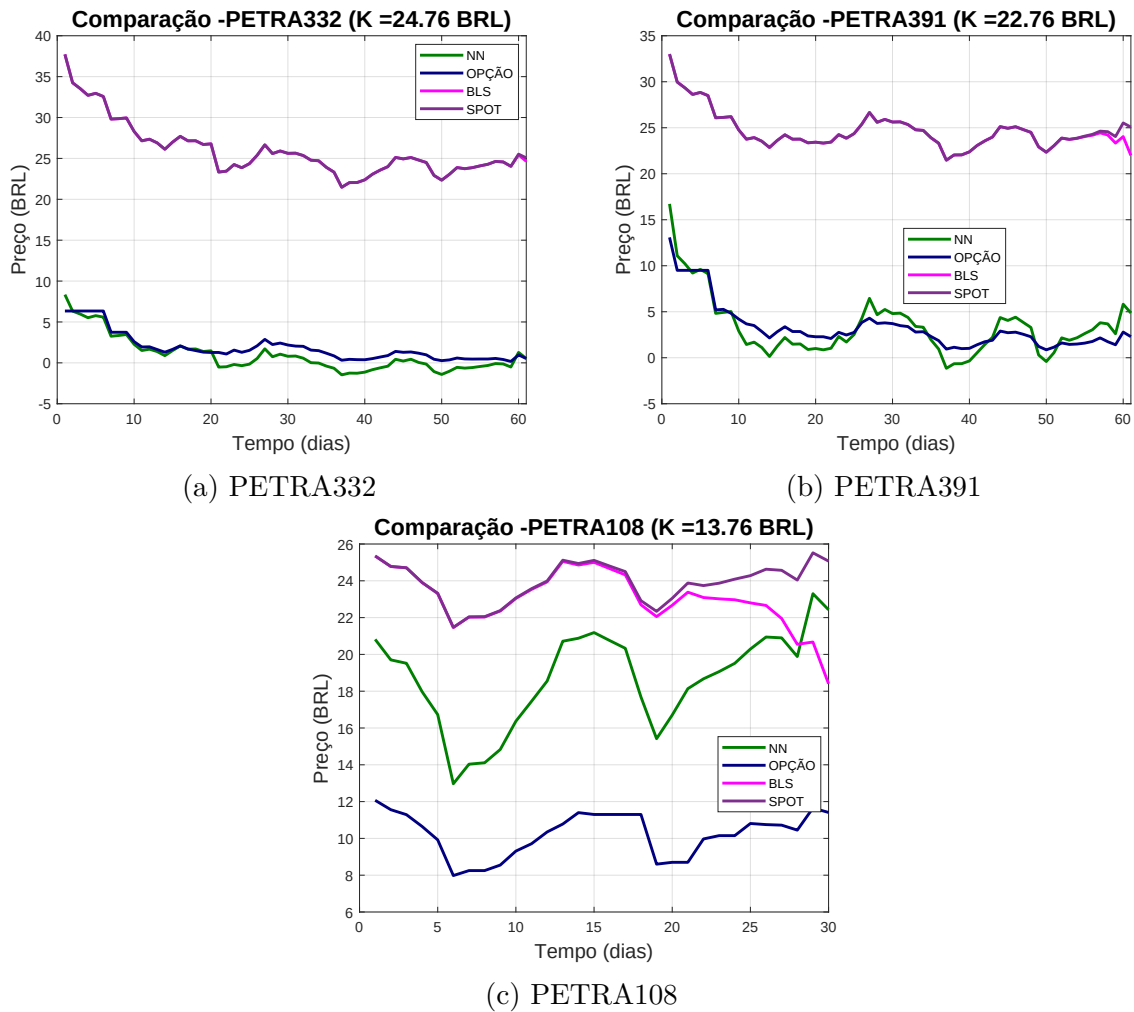


Figura 12 – (a) Resultados para PETRA332 (menor MSE), (b) Resultado para o PETRA391 e (c) resultados para PETRA108 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).

A opção PETRA108 está com o *strike* muito baixo, ou seja, ela é profundamente *ITM*, apresenta maior risco de não ser exercida. Talvez esse fato tenha contribuído para os elevados valores de métricas de erro para esta *call*.

5.1.2 PETRD

No caso das *calls* sobre PETR4 com vencimento em abril de 2023, foram tomadas 11 séries de preços com maior volume de negociação. A Tabela 5 segue o mesmo modelo da Tabela 4, da subseção anterior.

Tabela 5 – Erros Estatísticos para Rede Neural (NN) MLP das Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

PETRD	K (BRL)	MAE	MSE	MAPE	POCID	ARV	N
291	28,26	0,727	0,906	1,922	16,667	0,028	61
222	26,76	1,114	1,664	3,324	8,333	0,069	61
266	27,76	0,670	0,751	2,115	11,667	0,054	61
271	27,26	0,806	1,020	2,507	13,333	0,067	61
220	26,26	1,198	1,997	2,231	10,000	0,056	61
227	25,26	1,539	3,602	0,938	10,000	0,030	61
202	25,76	1,301	2,484	1,377	6,667	0,040	61
194	23,76	2,173	6,636	0,771	16,667	0,024	61
183	24,76	1,798	4,599	1,089	11,667	0,036	61
198	22,76	2,848	9,541	0,855	33,333	0,019	61
122	22,26	2,751	8,501	0,822	35,000	0,018	61

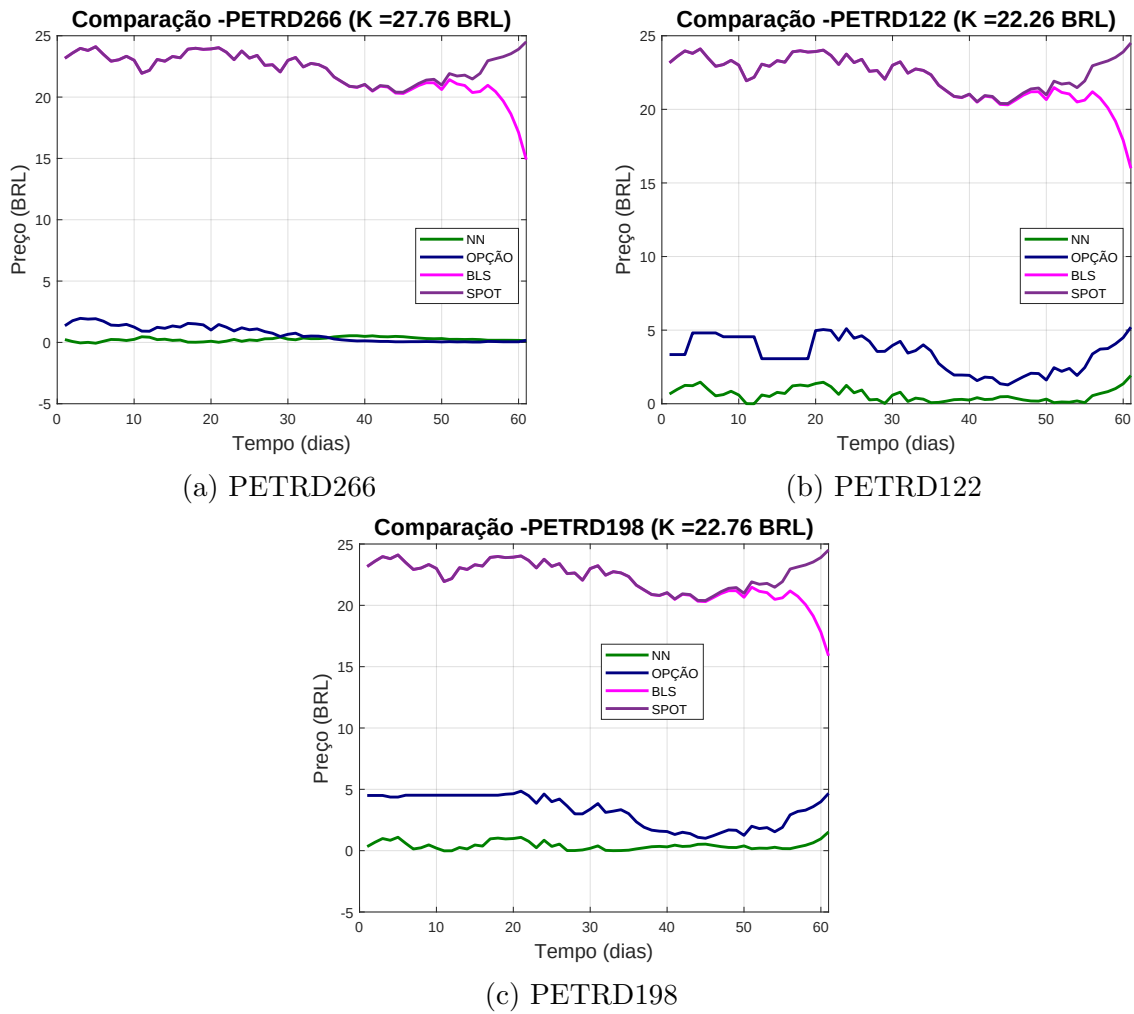


Figura 13 – (a) Resultados para PETRD266 (menor MSE), (b) Resultado para o PETRD122 e (c) resultados para PETRD198 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).

Nas opções de PETR4 com vencimento em abril também houve empate em duas métricas de erro: PETRD266 ($K = 27,76$ BRL) obteve os menores valores de *MAE* e *MSE* (0,670 e 0,751, respectivamente) e PETRD122 ($K = 22,26$ BRL) obteve um desempenho melhor no *POCID* e no *ARV* (35 e 0,018, respectivamente). Esses valores estão mostrados em negrito na Tabela 5. As Figuras 13a e 13b mostram os gráficos dessas duas opções. Observando o gráfico, nota-se que em PETRD266 a NN conseguiu chegar significativamente mais próxima do valor real do derivativo, em relação à PETRD122. Tomando por base os valores de *MSE*, o pior caso foi o de PETRD198 ($K = 22,76$ BRL) que obteve os maiores valores de *MAE* e *MSE* (2,848 e 9,541, respectivamente). Seu gráfico pode ser visto na Figura 13c. Note que todas as séries de preços das opções VALED apresentam

o mesmo tamanho: 61 dias. Novamente também observamos que as opções mais *ITM*, ou seja, com o preço de *Strike* menor que o preço da ação (veja a Tabela 1) apresentam maior erro na NN. No caso de PETRD266 o preço de *Strike* era 27,76 BRL enquanto o preço de PETR4 estava bem próximo de 25 BRL, ou seja, PETRD266 estava ligeiramente *OTM*. Já as opções PETRD122 e PETRD198 estão *ITM* com preços de *Strike* iguais a respectivamente 22.26 BRL e 22.76 BRL. A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) mais uma vez apresentou praticamente os mesmos valores do preço da ação subjacente: PETR4 (curva roxa), convergindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos pontos mais próximos ao vencimento da opção.

5.1.3 VALED

Tabela 6 – Erros estatísticos para a Rede Neural MLP das Opções Vale com modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

VALED	K (BRL)	MAE	MSE	MAPE	POCID	ARV	N
80	78,97	5,164	32,565	0,792	58,333	0,019	61
77	75,97	4,539	26,032	0,547	77,778	0,025	46
765	76,97	3,435	15,172	0,540	78,378	0,029	38
79	77,97	6,727	59,320	0,771	60,000	0,021	61
743	74,97	4,213	22,747	0,510	71,429	0,033	36
81	79,97	5,617	41,571	0,850	56,667	0,021	61
83	81,97	4,901	35,771	0,951	73,214	0,025	57
82	80,97	5,536	42,683	0,887	66,667	0,022	61
75	73,97	4,814	29,249	0,484	60,976	0,028	42
655	66,97	10,604	115,290	0,715	20,690	0,034	30

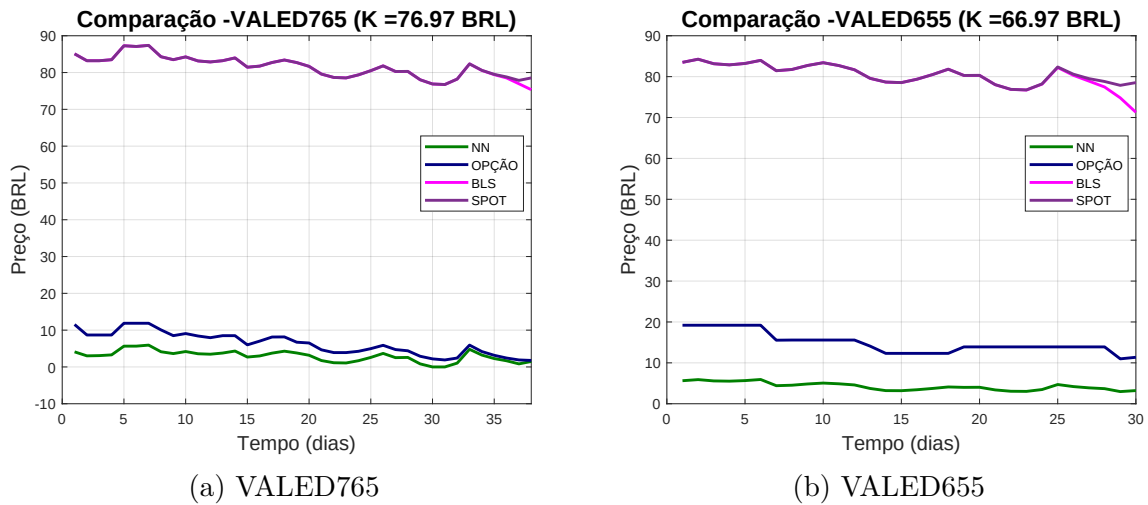


Figura 14 – (a) Resultados para VALED765 (menor MSE) e (b) resultados para VALED655 (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); e o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul).

Observando os resultados da Tabela 6 podemos verificar que a *call* VALED765 ($K = 76,97$ BRL) apresentou melhor desempenho em três indicadores: MAE (3,435), MSE (15,172) e POCID (78,378). Pode-se observar o gráfico desta opção na Figura 14a. Assim como as Tabelas 4 e 5, os melhores resultados para os indicadores foram colocados em negrito. O pior caso para as *calls* sobre VALE3 foi VALED655 ($K = 66.97$ BRL) e seu gráfico pode ser observado na Figura 14b. Atentar novamente para o comportamento da solução analítica de Black-Scholes (curva magenta), que apresenta praticamente os mesmos valores do preço de VALE3 (curva roxa), seguindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos últimos pontos do gráfico.

Nestas opções pôde-se observar o mesmo comportamento das opções sobre PETR4: a opção mais *ITM*, ou seja, com o preço de *Strike* menor que o preço da ação, foi a que apresentou o maior erro no aprendizado da NN. Quanto mais próximo o valor do preço de *Strike* estiver do valor da ação, menor o risco associado à opção, menor o erro de treinamento da NN.

5.2 Forecasting

Além do aprendizado, também foi realizada a pesquisa para avaliar a capacidade de previsão da NN. Para isso foram tomadas as séries já estudadas (PETRA, PETRD e VALED) e separadas em conjunto de treinamento e teste. Esta etapa foi separada em três horizontes de previsão: 1 dia, 5 dias e 10 dias, sendo estes horizontes os conjuntos de

testes e o restante da série, o conjunto de treinamento. Por exemplo, a série de preços de PETRA332 tem 61 valores (Tabela 4), o conjunto de treinamento para o horizonte de um dia foi 60 valores, para o horizonte de 5 dias, foi de 56 valores e para o horizonte de 10 dias, o conjunto de treinamento foi de 51 valores. Também foi tomado um outro método para efeito de comparação: o ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*). Para mais detalhes sobre a modelagem ARIMA ver (NICOLAU, 2012; AIUBE, 2013). Assim como nas tabelas da seção anterior, os melhores resultados para a NN foram apresentados em **negrito** nas tabelas a seguir:

5.2.1 PETRA

5.2.1.1 PETRA - 1 Dia

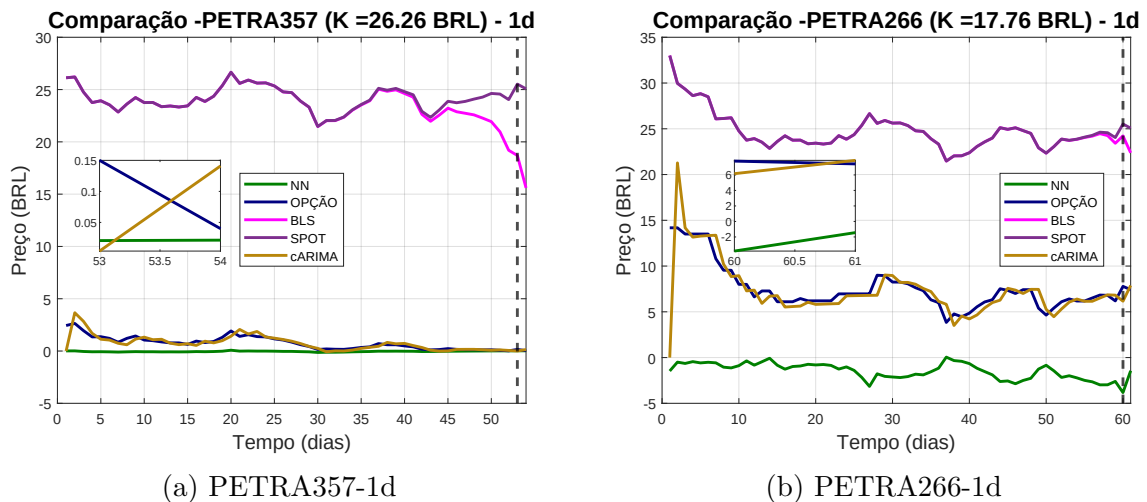


Figura 15 – (a) Resultados para PETRA357-1d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA266-1d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETRA subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 7 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 1 dia: PETRD-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
332	1,5661	0,4485	4,1449	1,0567	1,0887	0,2933	38,3333	45,0000	0,0383	0,0048
357	0,8044	0,2402	1,0273	0,1930	1,0879	0,4362	69,8113	52,8302	0,0293	0,0067
356	0,8075	0,2658	0,9879	0,2037	0,9379	0,4221	62,7451	47,0588	0,0291	0,0086
366	1,0385	0,2959	2,9371	0,5456	0,8489	0,3616	25,0000	45,0000	0,0425	0,0041
342	0,8928	0,3156	1,2123	0,2599	0,7916	0,3974	19,6078	47,0588	0,0293	0,0089
266	9,0003	0,9505	86,8673	4,7929	1,2136	0,1149	26,6667	38,3333	0,0174	0,0086
391	2,6424	0,6895	12,0196	3,5725	0,7387	0,1949	16,6667	43,3333	0,0292	0,0091
321	3,6782	0,6810	20,1307	2,0525	0,9501	0,1985	11,6667	40,0000	0,0241	0,0056
282	3,8999	0,7925	16,9619	1,3838	0,6560	0,1443	17,0213	44,6809	0,0232	0,0105
53	5,1564	0,9639	30,4370	2,9979	0,6862	0,1316	53,8462	28,2051	0,0281	0,0072
108	3,5073	1,1786	13,4212	6,9378	0,3349	0,1113	44,8276	51,7241	0,0360	0,0317
362	0,9652	0,2181	2,5978	0,2938	0,8776	0,5092	25,0000	40,0000	0,0445	0,0025

Observando a Tabela 7, vemos que a melhor desempenho foi de PETRA 357 ($K = 26,26$ BRL). Esta opção apresentou o menor valor de MAE (0,8044) e o maior valor de $POCID$ (69,8113). Observando a Figura 15a vemos que no último ponto, ou seja, o ponto de previsão, a NN ficou mais próxima do valor real da opção do que a estimativa do modelo ARIMA. O pior caso da NN, segundo o critério de maior MSE , foi PETRA266 ($K = 17,76$ BRL): $MSE = 86,8673$. Seu gráfico pode ser visualizado na Figura 15b e observando-o vemos que neste caso o modelo ARIMA conseguiu chegar mais próximo do valor real da opção. Assim como na seção anterior, começamos a observar o mesmo padrão de comportamento: quanto mais ITM , maior o risco associado, maior o erro da NN. A call PETRA266 tem valor de *Strike* muito inferior ao valor da ação (aproximadamente 25,00 BRL), aumentando seu risco. A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) segue praticamente os mesmos valores do preço do ativo (curva roxa), seguindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos últimos pontos do gráfico, ou seja, a solução de Black-Scholes aparentemente tem maior eficiência somente quando está bem próxima do vencimento da opção, embora os valores ainda estejam distantes dos valores reais.

5.2.1.2 PETRA - 5 Dias

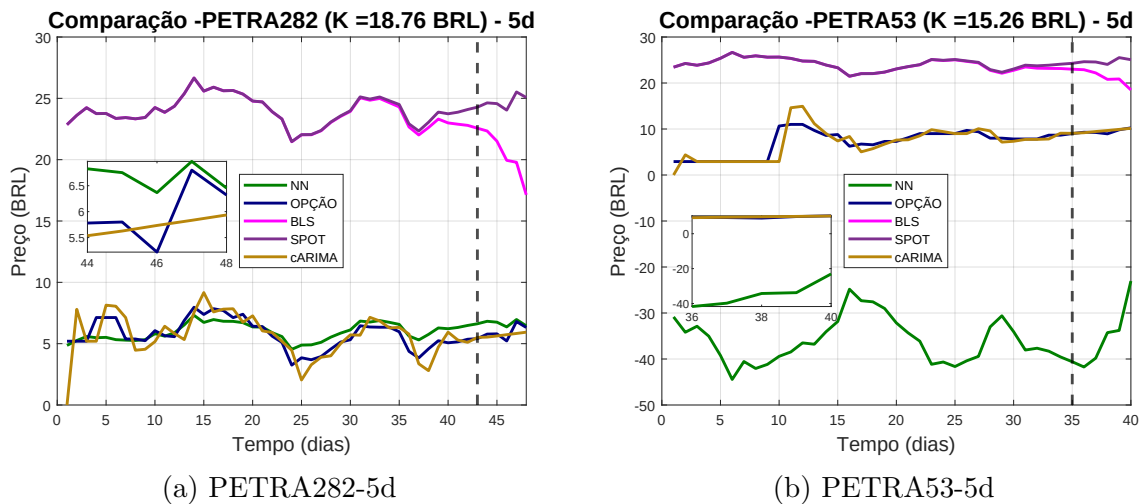


Figura 16 – (a) Resultados para PETRA282-5d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA53-5d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 8 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETRA. Horizonte de 5 dias: PETRA-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
332	1,0738	0,4421	2,0406	1,0506	0,5599	0,2803	46,6667	48,3333	0,0184	0,0047
357	0,7709	0,2380	0,9564	0,1927	1,0405	0,3879	75,4717	56,6038	0,0298	0,0066
356	0,7753	0,2588	0,9110	0,2013	0,9172	0,3713	78,4314	50,9804	0,0292	0,0084
366	1,0323	0,2960	2,8712	0,5453	0,8574	0,3845	33,3333	46,6667	0,0418	0,0042
342	0,9183	0,3051	1,1863	0,2529	0,9072	0,3840	84,3137	45,0980	0,0266	0,0087
266	2,6964	0,9519	10,2318	4,7848	0,4157	0,1151	55,0000	41,6667	0,0160	0,0086
391	2,0038	0,7260	7,6704	3,6415	0,5252	0,2112	66,6667	48,3333	0,0289	0,0090
321	1,4569	0,6827	4,2536	2,0507	0,3351	0,1984	73,3333	43,3333	0,0266	0,0055
282	0,7529	0,8113	0,8106	1,4155	0,1429	0,1494	70,2128	42,5532	0,0341	0,0105
53	43,3794	0,9427	1907,8689	2,9766	7,0834	0,1295	20,5128	28,2051	0,0251	0,0071
108	8,5436	1,1903	75,5084	6,9431	0,8316	0,1129	20,6897	48,2759	0,0339	0,0306
362	1,0241	0,2257	2,5713	0,2929	1,6599	0,8524	43,3333	41,6667	0,0379	0,0025

Observando a Tabela 8, na qual seguimos a mesma convenção de colocar os melhores valores da NN em negrito, observamos que o melhor desempenho da NN ocorreu em PETRA282 ($K = 18.76$ BRL), cujo gráfico está exibido na Figura 16a. Neste caso exibimos o horizonte de previsão (5 dias) numa pequena janela dentro da figura. Percebe-se que a solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) apresenta praticamente os mesmos valores do preço de PETR4 (curva roxa), seguindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos últimos pontos do gráfico, ou seja, a solução de Black-Scholes parece ser mais eficiente somente quando está bem próxima do vencimento da opção. É possível perceber que o preço da opção calculado pela NN (curva verde) chega bem próximo ao valor real da opção (curva azul). Observando as métricas de erro, vemos que esta opção apresentou os menores valores de MAE (0,7529), MSE (0,8106) e $MAPE$ (0,1429). Para o pior caso da NN, temos PETRA53 ($K = 15,26$ BRL), para a qual o ARIMA (curva amarela) se aproxima mais do preço real da *call* do que a NN. É notório que o mesmo padrão anteriormente observado se repete: quanto mais *ITM* a opção, maior o risco associado, maior o erro da NN. O gráfico com o desempenho da opção PETRA53 pode ser visto na Figura 16b.

5.2.1.3 PETRA - 10 Dias

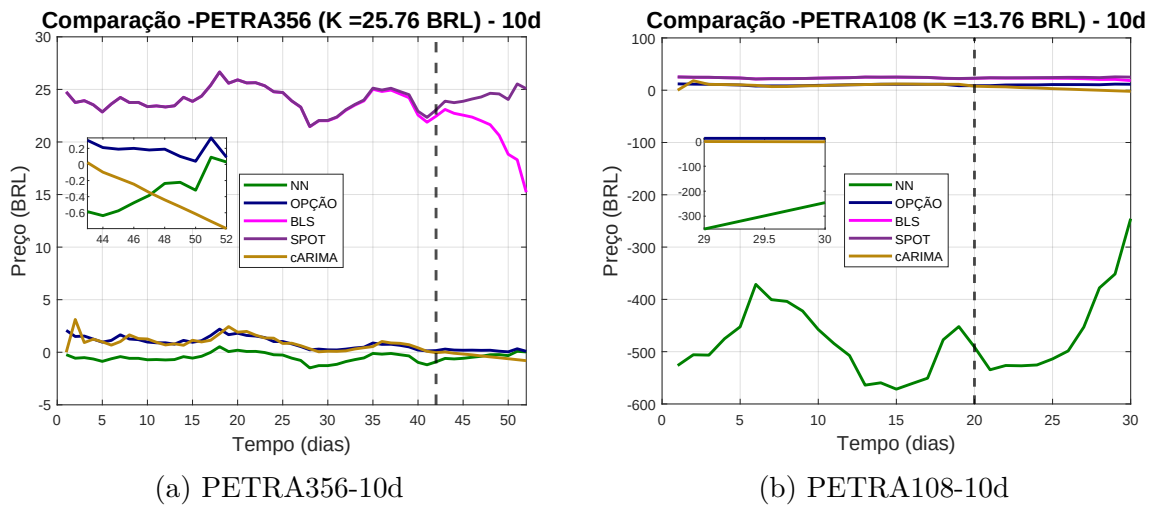


Figura 17 – (a) Resultados para PETRA356-10d (menor MSE), (b) Resultado para PETRA108-10d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 9 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série A para PETR4. Horizonte de 10 dias: PETRA-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NET	ARIMA	NET	ARIMA	NET	ARIMA	NET	ARIMA	NET	ARIMA
332	4,4834	0,5047	31,0026	1,1063	6,0749	0,4168	75,0000	48,3333	0,0104	0,0046
357	1,4321	0,3105	2,3314	0,2332	3,9735	1,6047	79,2453	60,3774	0,0191	0,0063
356	1,3044	0,3551	1,9618	0,2728	2,6136	1,2111	80,3922	54,9020	0,0201	0,0079
366	2,0993	0,2955	5,1961	0,5449	8,5173	0,3638	75,0000	50,0000	0,0149	0,0042
342	1,3935	0,4083	2,2670	0,3484	2,0480	0,8002	86,2745	50,9804	0,0193	0,0080
266	38,9711	1,1677	1581,6211	5,3632	5,5054	0,1468	53,3333	38,3333	0,0162	0,0087
391	7,1769	1,0986	76,7669	5,5910	2,4820	0,3102	78,3333	43,3333	0,0121	0,0104
321	5,7068	1,0716	45,5133	3,3833	1,7430	0,364	71,6667	46,6667	0,0126	0,0067
282	3,9658	0,8651	16,7202	1,5067	0,7236	0,1590	70,2128	46,8085	0,0198	0,0106
53	225,3495	1,3186	51766,6306	4,0119	38,3255	0,1692	33,3333	25,6410	0,0250	0,0103
108	488,0217	3,6194	242978,3881	32,3541	48,1011	0,3378	17,2414	51,7241	0,0333	0,036
362	1,3332	0,3336	2,8952	0,6762	4,5677	1,5066	68,3333	51,6667	0,0241	0,0043

Para o horizonte de 10 dias de previsão, observa-se que a opção com melhores indicadores foi PETRA356 ($K = 25.76$ BRL), apresentando os menores valores de MAE e MSE (1,3044 e 1,9618, respectivamente) e o valor mais alto de POCID: 80,3922. Seu gráfico pode ser visto na Figura 17a, no qual pode-se observar que no final do período de previsão a NN (curva verde) se aproxima mais do valor real da opção (curva azul) do que a modelagem ARIMA (curva amarela). O pior caso observado para a NN foi o de PETRA108 ($K = 13,76$ BRL), que apresentou os valores mais altos de MSE e MAE (488,0217 e 242978,3881). Esta *call* está mais ITM do que aquela, repetindo o padrão de quanto mais ITM está a opção, maior a dificuldade da NN em modelar seu preço, sendo mais eficiente o cálculo para opções pouco ITM (quase ATM), conforme a Tabela 1. Note que a solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) segue praticamente colada ao preço de PETR4 (curva roxa), seguindo em direção ao preço da opção (curva azul) somente nos últimos pontos do horizonte de previsão.

Ao observar as figuras 15a, 16a e 17a, os casos nos quais obteve-se os menores valores de MSE, percebe-se a NN se aproxima do valor real da opção para horizontes maiores de previsão. Para um dia de previsão, o ARIMA apresenta melhor previsibilidade, mas à medida que o horizonte de previsão aumenta para 5 e 10 dias, o ARIMA se distancia do valor da opção e a NN se aproxima do valor real.

5.2.2 PETRD

5.2.2.1 PETRD - 1 Dia

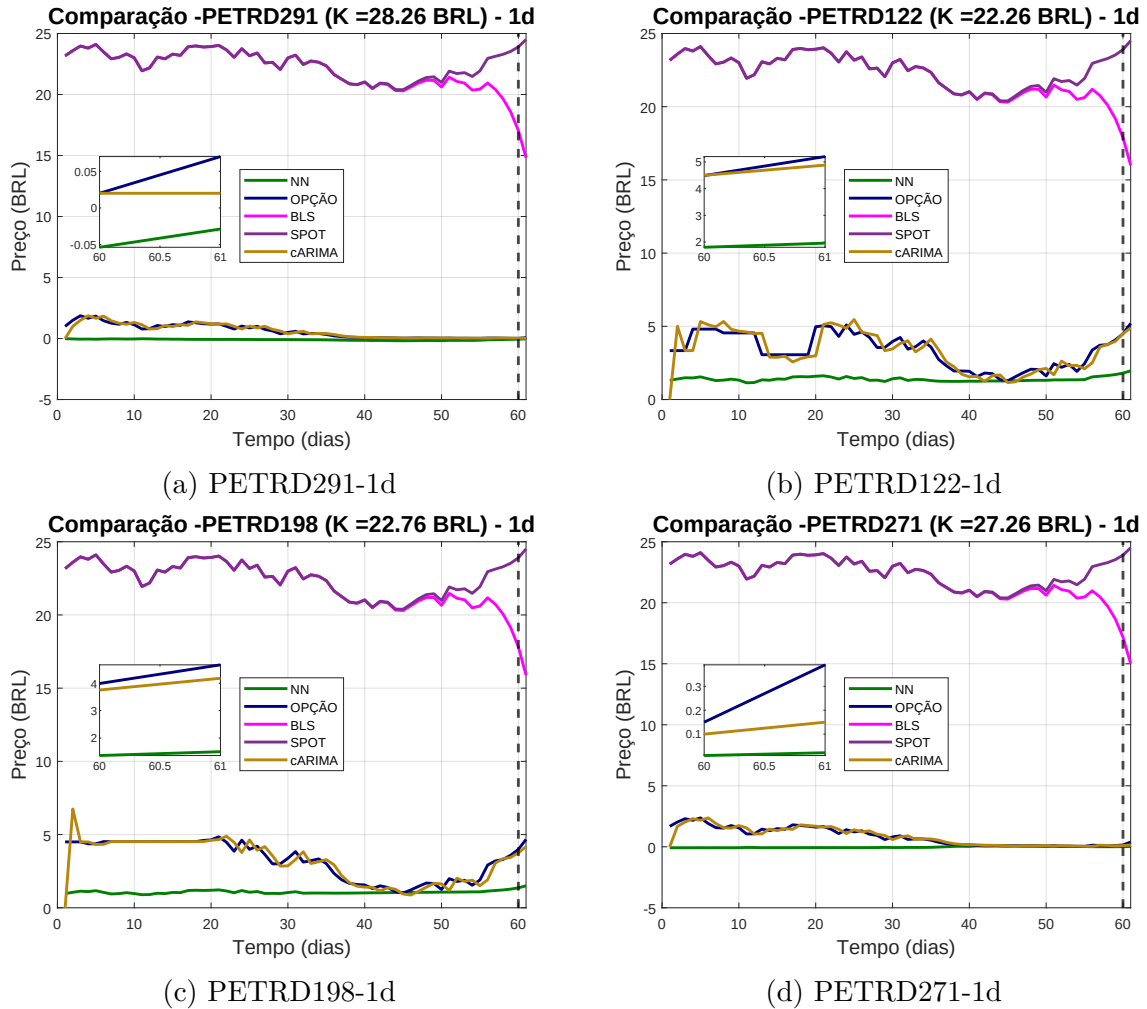


Figura 18 – (a) Resultados para PETRD291-1d (menor MSE), (b) Resultado para PETRD122-1d, (c) Resultados para PETRD198-1d, (d) Resultado para PETRD271-1d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 10 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 1 dia: PETRD-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
291	0,7007	0,1195	0,7645	0,0403	2,6146	0,2528	50,0000	33,3333	0,0254	0,0021
222	1,0330	0,1787	1,7603	0,0951	1,0180	0,2186	75,0000	45,0000	0,0270	0,0024
266	0,7765	0,1352	0,9790	0,0582	1,5661	0,2354	60,0000	35,0000	0,02660	0,0024
271	0,8710	0,1556	1,3496	0,0803	0,8787	0,2287	30,0000	40,0000	0,0292	0,0025
220	1,1447	0,2102	2,1408	0,1241	0,8605	0,2287	51,6667	48,3333	0,0268	0,0025
227	1,4186	0,3085	3,1661	0,2600	0,7056	0,2150	36,6667	48,3333	0,0260	0,0032
202	1,2512	0,2411	2,5045	0,1585	0,7792	0,2309	48,3333	36,6667	0,0262	0,0028
194	1,9946	0,3275	5,3129	0,2993	0,7381	0,1618	55,0000	40,0000	0,0219	0,0034
183	1,7583	0,2948	4,5663	0,2286	0,8301	0,2030	66,6667	50,0000	0,0242	0,0025
198	2,1964	0,3455	6,4843	0,5314	0,5895	0,1176	35,0000	43,3333	0,0221	0,0042
122	1,9637	0,4582	5,0807	0,5141	0,5253	0,1464	48,3333	36,6667	0,0216	0,0046

Na previsão dos valores das opções de PETR4 com vencimento em abril de 2023 houve alguns empates (10). A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) segue praticamente colada ao preço de PETR4 (curva roxa), convergindo para o preço da opção (curva azul) apenas nos últimos pontos do horizonte de previsão de 1 dia. A opção com menores valores de MAE e MSE (0,7007 e 0,7645, respectivamente) foi PETRD291 ($K = 28,26$ BRL). Todavia, PETRD122 ($K = 22,26$ BRL) também foi a melhor em dois critérios: menor MAPE (0,5253) e menor ARV (0,0216). Observando seus gráficos nas Figuras 18a e 18b verifica-se que PETRD291 apresentou melhor convergência com o preço da opção do que PETRD122. Os piores resultados aconteceram em PETRD198 ($K = 22,76$ BRL), apresentando os valores mais elevados de MAE (2,2482) e de MSE (6,2510); e em PETRD271 ($K = 27,26$ BRL), esta apresentando o menor valor de POCID (30) e o maior valor de ARV (0,0292). Seus gráficos são apresentados nas Figuras 18c e 18d, nos quais pode-se notar a modelagem ARIMA (curva amarela) ficou mais próxima do preço da opção (curva azul) do que a NN (curva verde).

5.2.2.2 PETRD - 5 Dias

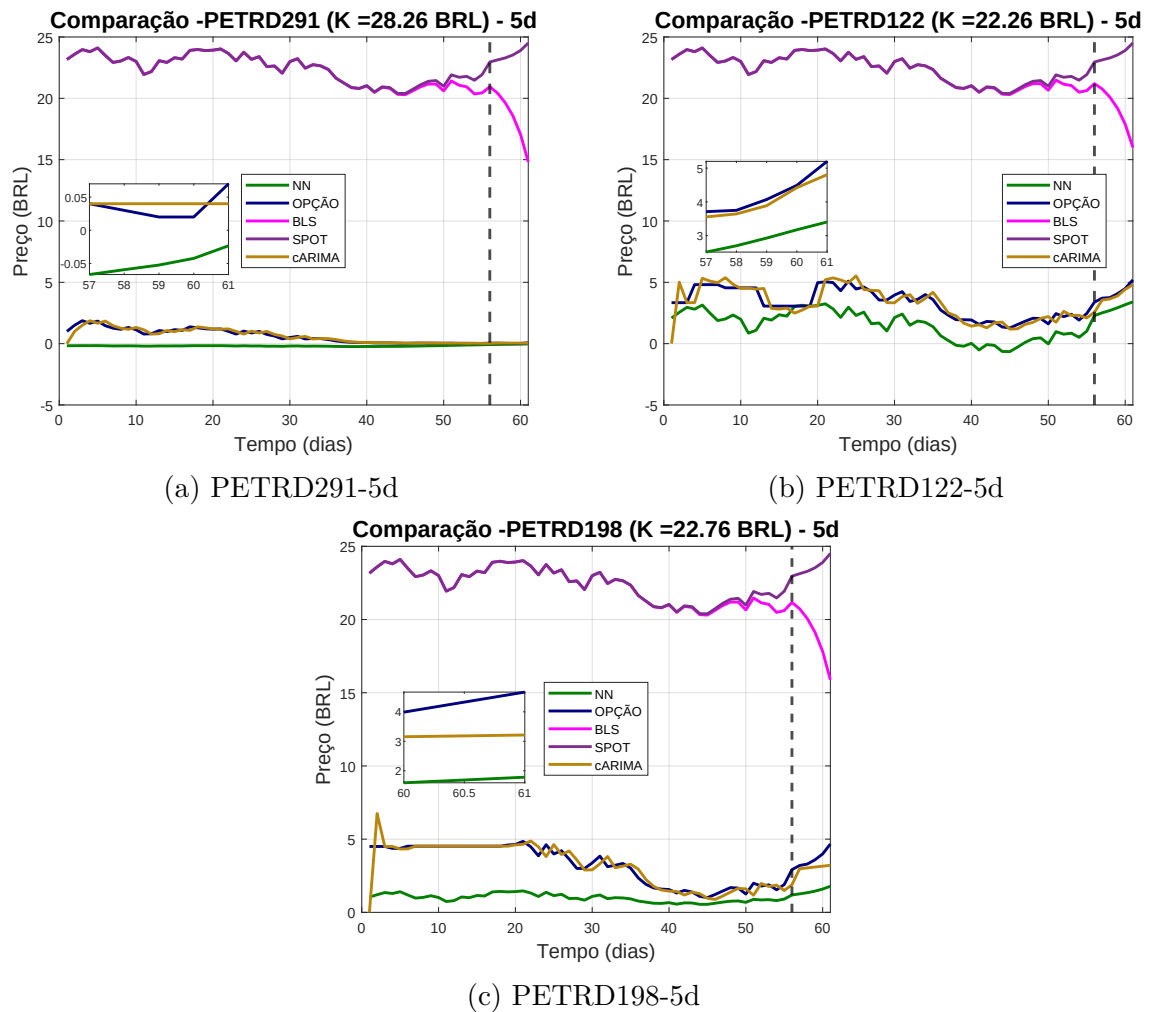


Figura 19 – (a) Resultados para PETRD291-5d (menor MSE), (b) Resultado para PETRD122-5d, (c) Resultado para PETRD198-5d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva roxa); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 11 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 5 dias: PETRD-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
291	0,7782	0,1197	0,9273	0,0402	2,6769	0,2727	68,3333	31,6667	0,0250	0,0021
222	0,9089	0,1795	1,2933	0,0963	1,5688	0,2180	10,0000	41,6667	0,0442	0,0024
266	0,8075	0,1359	1,0581	0,0582	1,5576	0,2555	68,3333	31,6667	0,0265	0,0024
271	0,8212	0,1559	1,2014	0,0804	1,1190	0,2320	11,6667	35,0000	0,0344	0,0025
220	1,0604	0,2154	1,7648	0,1301	1,2690	0,2340	6,6667	45,0000	0,0386	0,0026
227	1,4007	0,2823	2,4870	0,2454	1,6866	0,2083	8,3333	43,3333	0,0760	0,0035
202	1,1594	0,2521	1,8908	0,1734	1,4473	0,2389	5,0000	33,3333	0,0520	0,0031
194	2,1726	0,3630	5,7278	0,3557	0,9083	0,1734	58,3333	33,3333	0,0197	0,0040
183	1,6027	0,3216	3,7393	0,2683	0,9482	0,2159	13,3333	43,3333	0,0378	0,0028
198	2,2482	0,3786	6,2510	0,5768	0,6518	0,1251	61,6667	43,3333	0,0200	0,0046
122	1,7666	0,4690	3,6109	0,5179	0,5972	0,1495	60,0000	35,0000	0,0133	0,0047

Observando a Tabela 11, nos quais os melhores resultados da NN são apresentados em negrito, vemos que o melhor caso neste horizonte de previsão foi PETRD291 ($K = 28,26$ BRL). Esta *call* apresentou os menores valores de MAE (0,7782) e MSE (0,9273). Neste mesmo conjunto houve outra opção que também obteve os melhores resultados em dois critérios: PETRD122 ($K = 22,26$ BRL). Esta apresentou os menores valores de MAPE e ARV (0,5972 e 0,0133, respectivamente) e seu gráfico é apresentado na Figura 19b. Neste gráfico podemos perceber que a opção com menor MSE (PETRD291) ainda se aproxima mais do valor real da opção do que a PETRD122. O pior resultado desse conjunto foi da *call* PETRD198 ($K = 22,76$ BRL), apresentando o mais alto valor de MSE: 2,2482. Observando a Figura 19c, vemos que a modelagem ARIMA (curva amarela) permaneceu durante todo o tempo mais próxima ao preço da opção (curva azul) do que a NN (curva verde). Já a solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) segue praticamente colada ao preço da ação (curva roxa), convergindo para o preço da opção apenas nos últimos pontos do horizonte de previsão.

Em particular, nas séries PETRD, a modelagem ARIMA permaneceu mais próxima do valor real da opção em todos os casos, inclusive nas janelas de previsão de 5 dias.

5.2.2.3 PETRD - 10 Dias

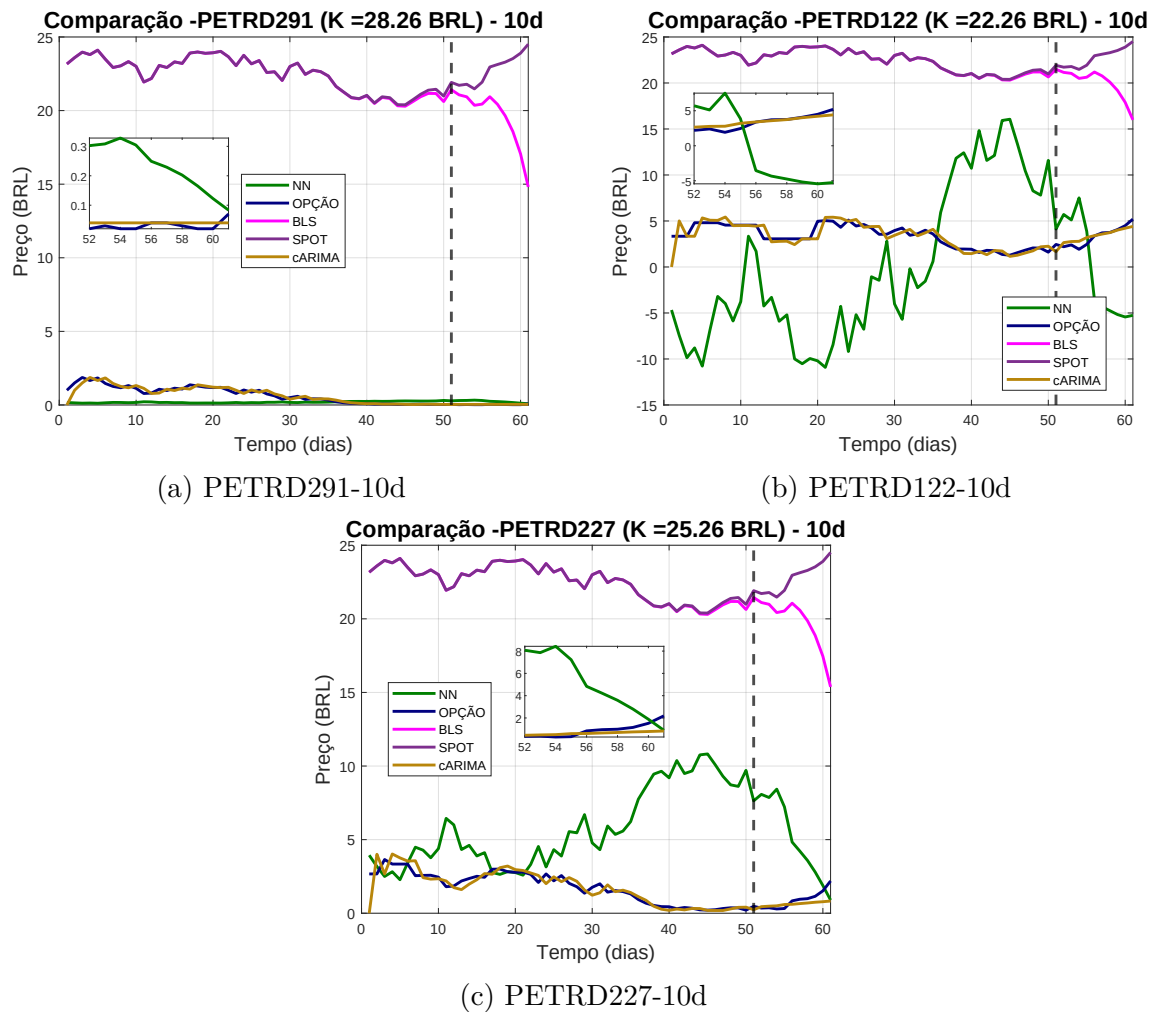


Figura 20 – (a) Resultados para PETRD291-10d (menor MSE), (b) Resultados para PETRD122-10d e (c) Resultados para PETRD227-10d (maior MSE). Para todos os gráficos, existem quatro curvas: o preço do activo PETR4 subjacente - SPOT (curva vermelha); o preço calculado pela solução analítica Black-Scholes - BLS (curva magenta); o preço calculado pelo NN (curva verde); o preço de mercado de opções - OPÇÃO (curva azul) e o preço previsto pela modelagem ARIMA (curva amarela).

Tabela 12 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Petrobrás com o modelo de Black-Scholes - Série D para PETR4. Horizonte de 10 dias: PETRD-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
291	0,5734	0,1198	0,5374	0,0402	2,9387	0,2891	11,6667	31,6667	0,0527	0,0021
222	1,2428	0,1866	2,2280	0,0982	7,3771	0,2741	11,6667	36,6667	0,0447	0,0024
266	0,6365	0,1354	0,6035	0,0582	2,7784	0,2534	15,0000	31,6667	0,0728	0,0024
271	0,8819	0,1572	0,9884	0,0808	5,4978	0,2612	11,6667	35,0000	0,1502	0,0025
220	1,9934	0,2349	6,6249	0,1476	9,1849	0,2753	11,6667	46,6667	0,0257	0,0025
227	4,3352	0,3549	31,7224	0,2989	9,7896	0,2632	8,3333	45,0000	0,0204	0,0037
202	2,5442	0,2762	10,9040	0,1945	8,1978	0,2838	8,3333	30,0000	0,0236	0,0034
194	6,2666	0,4197	72,8810	0,4845	5,8874	0,1952	21,6667	30,0000	0,0205	0,0052
183	4,5388	0,3644	35,9233	0,3433	7,4934	0,2443	15,0000	40,0000	0,0215	0,0035
198	7,5383	0,4495	74,4845	0,7382	3,4521	0,1451	10,0000	43,3333	0,0221	0,0057
122	8,7526	0,4908	91,9409	0,5410	3,1019	0,1592	15,0000	36,6667	0,0200	0,0052

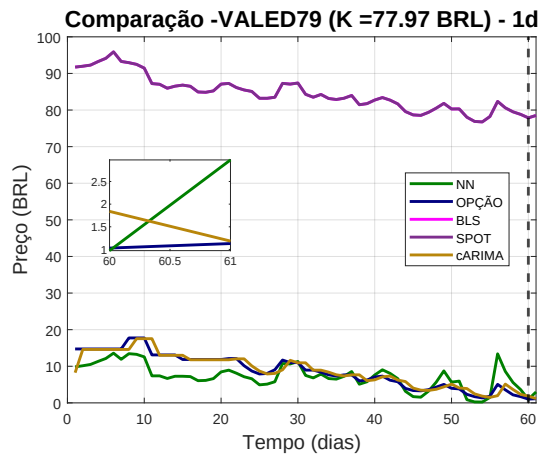
Para o horizonte de previsão de 10 dias, a *call* PETRD291 ($K = 28,26$ BRL) foi a que apresentou o menor MAE (0,5734) e o menor MSE (0,5374), como pode ser visto na Tabela 12, e o seu gráfico é exibido na Figura 20a. Diferentemente do que ocorreu para as janelas de 1 dia e 5 dias, neste caso a NN (curva verde) se aproximou mais do valor da opção (curva azul) do que o modelo ARIMA (curva amarela). Isto se deve ao fato de que a NN aprende com os dados, enquanto o modelo ARIMA segue os dados. Numa janela de previsão mais curta o ARIMA consegue resultados melhores, mas para horizontes maiores de previsão, a NN consegue se aproximar mais do valor de mercado. Os piores casos da NN foram PETRD122 e PETRD227 ($K = 22,26$ BRL e $K = 25,26$ BRL, respectivamente). A primeira teve os maiores de MAE (8,7526) e MSE (91,9409) e a segunda teve o maior valor de MAPE (9,7896) e o menor valor de POCID (8,3333). Seus gráficos são apresentados nas Figuras 20b e 20c. A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) segue bem próxima ao preço do ativo subjacente PETR4 (curva roxa), diferenciando apenas nos últimos pontos da janela de previsão.

Observando as Figuras 18a, 19a e 20a, casos nos quais foram registrados os menores valores de *MSE*, pode-se perceber um comportamento parecido com as opções de PETR4 com vencimento em janeiro de 2023: para um horizonte curto de previsão (1 e 5 dias, neste caso) a modelagem ARIMA consegue obter valores mais próximos dos preços das opções. Todavia, para um horizonte maior (Figura 20a) a NN chega mais próximo do valor da opção, enquanto o ARIMA diverge. Até no caso de maior MSE (Figura 20c, $MSE = 31,7224$) a NN chega mais próxima do valor da opção no último ponto de previsão.

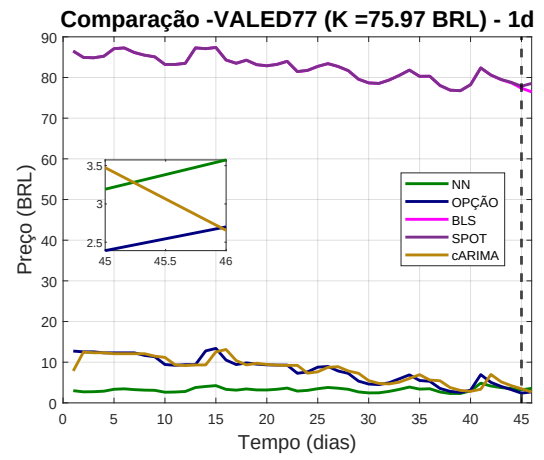
5.2.3 VALED

5.2.3.1 VALED - 1 Dia

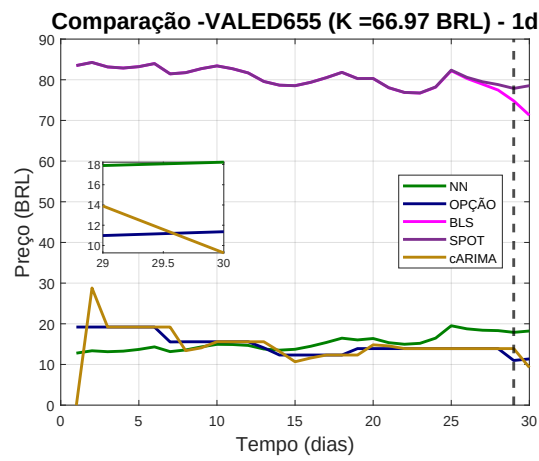
Os resultados obtidos para as previsões nas *calls* de Vale com vencimento em abril de 2023 podem ser vistos nas figuras a seguir. As métricas de erro estão exibidas nas tabelas 13, 14 e 15.



(a) VALED79-1d



(b) VALED77-1d



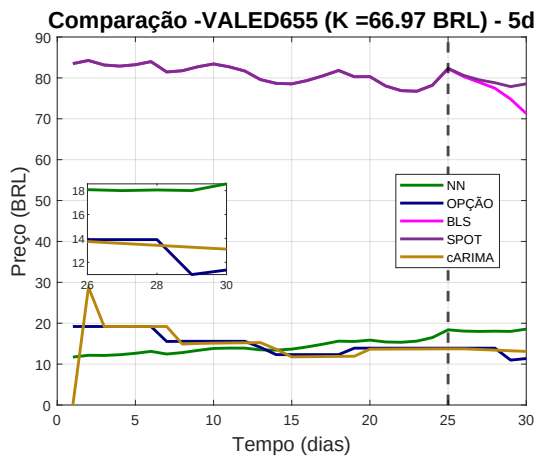
(c) VALED655-1d

Tabela 13 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 1 dia: VALED-1d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

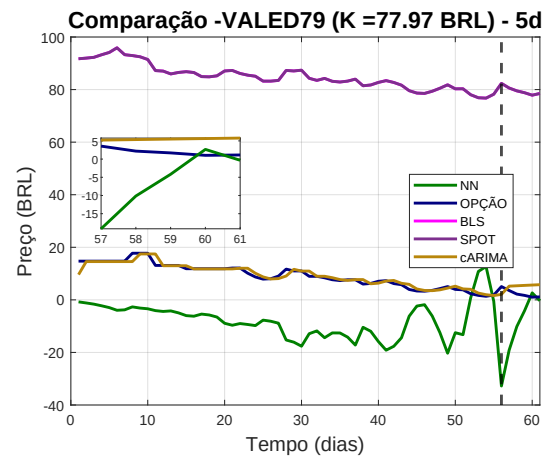
OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
80	4,0667	0,7151	21,6022	2,2852	0,5688	0,1638	53,3333	40,0000	0,0203	0,0036
77	4,8250	0,9075	33,5871	1,9066	0,5205	0,1423	71,1111	51,1111	0,0324	0,0044
765	4,1699	1,0798	25,6009	2,2289	0,5625	0,2042	75,6757	48,6486	0,0396	0,0079
79	2,8179	0,8344	12,2453	2,0133	0,4152	0,1518	63,3333	36,6667	0,0155	0,0016
743	4,2519	1,0184	27,5131	2,1527	0,4649	0,1491	68,5714	37,1429	0,0451	0,0081
81	3,9539	0,6674	21,2504	1,3154	0,6149	0,1988	50,0000	33,3333	0,0190	0,0015
83	4,1146	0,7310	24,3959	2,0648	1,0283	0,2974	50,0000	48,2143	0,0228	0,0021
82	3,9900	0,8495	21,8182	3,3987	0,7358	0,2841	58,3333	58,3333	0,0180	0,0029
75	4,6916	1,2219	32,5129	5,9036	0,4405	0,1388	60,9756	34,1463	0,0406	0,0114
655	3,5271	1,6366	17,0698	16,8056	0,2413	0,1007	20,6897	3,4483	0,1203	0,0279

A Tabela 13 apresenta os resultados para as *calls* sobre VALE3 com vencimento em abril de 2023 e com previsão para 1 dia, seguindo a mesma convenção das tabelas anteriores, nas quais os melhores resultados da NN são apresentados em negrito. Deste conjunto, a opção com melhor desempenho para a NN foi VALED79 ($K = 77,97$ BRL), sendo esta a que apresentou o menor valor de MAE (2,8179), de MSE (12,2453) e de ARV (0,0155); seu gráfico é exibido na Figura 21a. Para os piores desempenhos houve empate entre VALED77 ($K = 75,97$ BRL) e VALED655 ($K = 66,97$ BRL), sendo esta a que apresentou o menor valor de POCID (20,6897) e o maior valor de ARV (0,1203) enquanto aquela apresentou os maiores valores valores de MAE (4,8250) e MSE (33,5871). Os gráficos destas duas opções são exibidos nas Figuras 21b e 21c. Para o horizonte de previsão de 1 dia a modelagem ARIMA apresentou melhores resultados do que a NN, já que o ARIMA recebe diretamente os valores de preços, enquanto a NN precisa calcular a partir da Equação de Fourier. A solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) aparece muito próxima ao preço do ativo VALE3 (curva roxa), diferenciando apenas nos últimos pontos da janela de previsão.

5.2.3.2 VALED - 5 Dias



(a) VALED655-5d



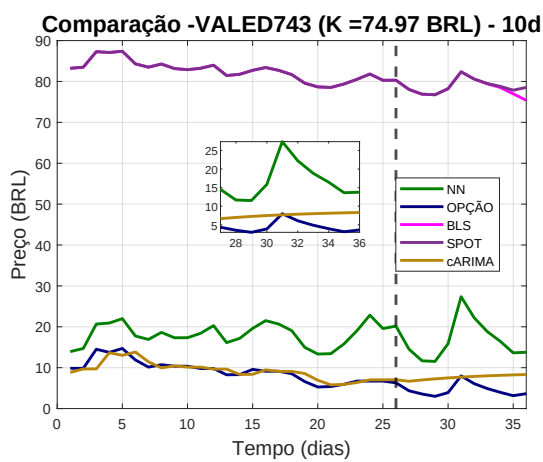
(b) VALED79-5d

Tabela 14 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 5 dias: VALED-5d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

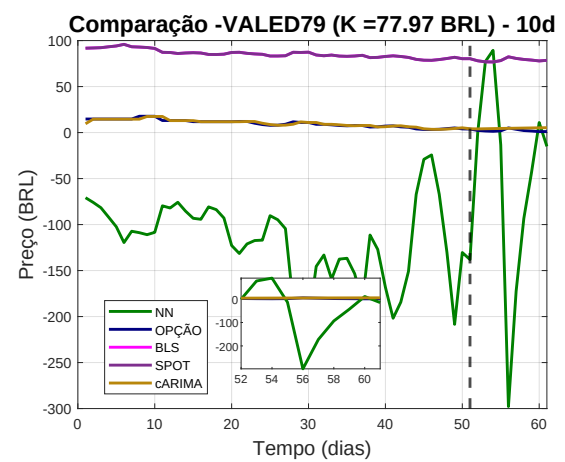
OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
80	11,6612	0,8862	156,4927	2,9140	2,2611	0,3707	6,6667	33,3333	0,0198	0,0053
77	12,1906	1,2750	175,9164	4,4397	1,4873	0,2847	13,3333	46,6667	0,0248	0,0127
765	7,9811	1,4117	84,6000	3,7772	1,1340	0,3762	5,4054	37,8378	0,0335	0,0167
79	17,8231	1,0413	367,0814	2,8156	2,6053	0,3243	13,3333	33,3333	0,0172	0,0026
743	8,7625	1,6061	95,4442	6,5781	1,0487	0,266	20,0000	28,5714	0,0337	0,0190
81	12,2241	0,8343	170,9246	1,8020	4,2902	0,6063	11,6667	26,6667	0,0225	0,0023
83	9,7063	0,9055	119,3462	5,0053	11,9002	0,5775	12,5000	50,0000	0,0340	0,0050
82	10,6512	1,0680	137,0346	2,7574	7,0880	1,4226	18,3333	58,3333	0,0275	0,0029
75	12,4592	1,5145	177,3373	7,3850	1,3027	0,2024	24,3902	26,8293	0,0266	0,0162
655	3,7905	1,5849	19,4034	16,4111	0,2543	0,0968	20,6897	13,7931	0,122	0,0285

Para um horizonte de 5 dias de previsão os resultados são apresentados na Tabela 14, na qual o melhores valores de desempenho da NN são apresentados em negrito. Nesta circunstância o melhor desempenho da NN ocorreu em VALED655 ($K = 66,97$ BRL). Mais uma vez a solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) permaneceu muito próxima ao preço da ação (curva roxa), apenas nos últimos pontos da janela de previsão sofrendo uma diferenciação.

5.2.3.3 VALED - 10 Dias



(a) VALED743-10d



(b) VALED79-10d

Tabela 15 – Erros Estatísticos para a previsão da Rede Neural (NN) MLP e do modelo ARIMA para as Opções de Vale com o modelo de Black-Scholes - Série D para VALE3. Horizonte de 10 dias: VALED-10d. O melhor valor para cada medida de erro da NN está em negrito.

OPTION	MAE		MSE		MAPE		POCID		ARV	
	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA	NN	ARIMA
80	65,7846	0,8411	5146,9255	2,5641	14,2124	0,3420	5,0000	28,3333	0,0170	0,0049
77	48,7081	1,2470	2712,5885	5,4081	6,2654	0,2314	13,3333	37,7778	0,0224	0,0125
765	24,4092	1,5284	763,6794	4,2809	3,6257	0,4552	5,4054	35,1351	0,0288	0,0235
79	123,1539	1,0629	18474,8906	2,7653	18,9851	0,3574	6,6667	31,6667	0,0165	0,0028
743	10,1095	1,5175	114,4992	4,7506	1,6260	0,3093	71,4286	28,5714	0,0281	0,0284
81	79,2284	0,8567	7598,7699	1,7824	30,4665	0,6504	10,0000	25,0000	0,0173	0,0025
83	33,2883	0,9263	1721,8719	5,0264	49,6719	0,7025	8,9286	48,2143	0,0206	0,0047
82	60,1783	1,1128	4920,764	2,6835	47,1262	1,4519	11,6667	55,0000	0,0179	0,0031
75	67,8062	1,4362	4914,4579	6,6178	7,6542	0,1984	21,9512	17,0732	0,0241	0,0166
655	89,4380	2,5647	8191,7708	21,8187	6,1833	0,1733	17,2414	6,8966	0,0333	0,0353

A última situação estudada foi a previsibilidade dos modelos ARIMA e da NN para um horizonte de previsão de 10 dias para as opções de VALE3 com vencimento em abril de 2023, cujos resultados são apresentados na Tabela 15. Novamente, os melhores resultados para a NN são apresentados em negrito. Nesta circunstância a melhor previsibilidade ocorreu para VALED743 ($K = 74,97$ BRL) que apresentou os menores valores de MAE (10,1095), MSE (114,4992), MAPE (1,6260) e o maior valor de POCID (71,4286). Seu gráfico pode ser visto na Figura 23a. Neste caso, mesmo o ARIMA (curva amarela) tendo chegado mais próximo do valor final, conseguimos perceber que a movimentação da NN (curva verde) é semelhante à movimentação da opção (curva azul), razão pela qual o POCID teve um valor mais elevado. O ARIMA num horizonte de 10 dias já não tem capacidade de acompanhar a movimentação do preço da opção, mas a NN sim. Isso pode ser observado pelo aspecto do ARIMA: um reta praticamente paralela ao eixo temporal. O pior caso da NN ocorreu em VALED79 ($K = 77,97$ BRL), sendo os valores mais altos de MAE (123,1539) e MSE (18474,8906); seu gráfico é apresentado na Figura 23b. Neste caso também a solução analítica de Black-Scholes (curva magenta) permaneceu muito próxima ao preço da ação (curva roxa), diferenciando apenas nos últimos pontos da janela de previsão.

Deve-se ressaltar a diferença metodológica entre a previsão utilizando a NN e o ARIMA. A NN resolve a equação de calor, dada pela Equação 2.27 e recebe os valores de u e τ , dados pelas Equações 2.35, 2.33 e 2.55, respectivamente, como condições de contorno. Uma vez a equação resolvida, os resultados devem ser convertidos para valores reais, tempo em dias e c em BRL. O ARIMA, por sua vez, recebe os valores já em unidades reais, dias e BRL, o que facilita bastante a previsibilidade da referida metodologia.

Nota-se que a NN aprende o comportamento dos dados e consegue resolver a Equação de Black-Scholes com uma pequena quantidade de dados reais, utilizados apenas como condições de contorno. Isso é uma vantagem computacional, pois não é necessária uma grande massas de dados do mercado financeiro para o treinamento da NN, como seria necessário para o ARIMA.

6 Conclusão

Este texto apresenta uma nova metodologia para o cálculo de preços de opções, com particular interesse no mercado brasileiro, com a proposta da resolução da Equação de Black-Scholes através de uma Rede Neural (NN) *Multi Layer Perceptron*. O modelo analítico mais conhecido para a precificação de opções europeias é a Equação de Black-Scholes (Equação 2.14), uma Equação Diferencial Parcial Parabólica de Segunda Ordem, cujas soluções são as Equações 2.37 e 2.16. Para que a NN pudesse resolver este problema, a Equação de Black-Scholes foi transformada na Equação de Fourier, dada pela Equação 2.27, a qual também é uma Equação Diferencial Parcial Parabólica de Segunda Ordem. As opções utilizadas foram *calls* sobre as ações PETR4 e VALE3, devido ao alto volume de negociação desses derivativos.

A NN foi implementada com a biblioteca Neurodiffeeq, escrita em Python 3. Este trabalho foi dividido em duas etapas: aprendizado e previsibilidade. Para medir o desempenho da NN, foram utilizadas cinco métricas de erro: MAE, MSE, MAPE, POCID e ARV. Na primeira etapa pôde-se perceber que a NN é capaz de aprender com os dados e consegue se aproximar dos preços praticados pelo mercado de opções bem mais que a solução analítica de Black-Scholes. Pôde-se verificar que a solução analítica de Black-Scholes diverge significativamente dos preços das opções, se aproximando destes somente em datas bem próximas à maturidade da opção.

Na segunda etapa foi verificada a capacidade de previsibilidade da NN e esta foi comparada com uma metodologia já bem estabelecida: a modelagem ARIMA. A NN foi testada para previsões de 1, 5 e 10 dias. Para horizontes de previsão mais curtos, o modelo ARIMA consegue melhores resultados. Todavia, para horizontes maiores de previsão, a NN apresenta melhor capacidade de previsibilidade, visto que ela aprende com os dados, enquanto o ARIMA trata apenas dos valores disponíveis.

Neste trabalho foi possível encontrar uma solução numérica para Equação de Black-Scholes 2.14 diferente da solução analítica, dada pelas Equações 2.37 e 2.16, e que apresenta maior precisão para os dados reais de preços de opções.

De forma comparativa, os processos de previsão que foram estudados nos permitem concluir que a solução numérica da Equação de Black-Scholes captura características dos fenômenos enquanto a modelagem ARIMA é guiada por dados. Logo, o ARIMA é mais preciso para horizontes curtos de previsão. A medida que os horizontes de previsão

aumentam, o ARIMA não tem capacidade de absorver as características intrínsecas do processo, enquanto a solução numérica de Black-Scholes consegue absorver essas características. Todavia, o ARIMA consegue capturar as flutuações de preços instantâneas, obtendo assim melhor desempenho para horizontes curtos de previsão de preços. Essas flutuações de preços são tidas como ruídos para a Equação de Black-Scholes e isso suaviza as previsões para horizontes muito curtos.

Logo, a NN consegue resolver a Equação de Black-Scholes utilizando uma pequena quantidade de dados reais como condições de contorno, não sendo necessária uma grande massa de dados reais do mercado de derivativos para o treinamento da NN, como seria o caso para a modelagem ARIMA.

Como trabalhos futuros, pode-se sugerir:

- Utilizar essa modelagem para outros mercados de derivativos, como o mercado de contratos futuros.
- Analisar a modelagem de preços de opções de venda (*puts*).
- combinar os modelos ARIMA e a solução numérica da Rede Neural para obter uma ferramenta de previsibilidade para horizontes curtos e longos. Ou seja, utilizar a Equação de Black-Scholes e o erro do método ARIMA como entradas da Rede Neural e busca-se minimizar o erro da Equação Diferencial e o erro do ARIMA.

Referências Bibliográficas

AIUBE, F. A. L. **Modelos Quantitativos em Finanças**. 1. ed. Porto Alegre: Editora Bookman, 2013.

ANDEREGG, B.; ULMANN, F.; SORNETTE, D. The impact of option hedging on the spot market volatility. **Journal of International Money and Finance**, v. 124, p. 102627, 2022. ISSN 0261-5606. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261560622000304>>.

ARABAS, S.; FARHAT, A. Derivative pricing as a transport problem: Mpdata solutions to black-scholes-type equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 373, p. 112275, 2020. ISSN 0377-0427. Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042719302584>>.

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Elementos de Física Matemática - volume 2**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973. ISSN 00223808, 1537534X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1831029>>.

BOIRE, F.-M.; REESOR, R. M.; STENTOFT, L. Lower bounds for american option prices with control variates. **Operations Research Letters**, v. 51, n. 6, p. 568-574, 2023. ISSN 0167-6377. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637723001608>>.

BOROCHIN, P.; WU, Z.; ZHAO, Y. The effect of option-implied skewness on delta- and vega-hedged option returns. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, v. 74, p. 101408, 2021. ISSN 1042-4431. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1042443121001244>>.

BOX, G. E. P. et al. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 3. ed. Porto Alegre: Wiley, 2015.

BRIGATTO, A.; FANZERES, B. A soft robust methodology to devise hedging strategies in renewable energy trading based on electricity options. **Electric Power Systems Research**, v. 207, p. 107852, 2022. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779622000827>>.

CAPUOZZO, P. et al. Path integral monte carlo method for option pricing. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 581, p. 126231, 2021. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437121005045>>.

CHEN, F. et al. Neurodiffee: A python package for solving differential equations with neural networks. **Journal of Open Source Software**, v. 5, p. 1931, 2020. ISSN 2475-9066. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.01931>>.

CHEN, Z.; ZHENG, C.; HAO, X. Volatility spillover effect between internet finance and banks. **Journal of Business Research**, v. 141, p. 512–519, 2022. ISSN 0148-2963. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0148296321008560>>.

CHI, T.-L.; LIU, H.-T.; CHANG, C.-C. Hedging performance using google trends—evidence from the indian forex options market. **International Review of Economics and Finance**, 2023. ISSN 1059-0560. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1059056023000035>>.

CHO, J.; KIM, Y.; LEE, S. An accurate and stable numerical method for option hedge parameters. **Applied Mathematics and Computation**, v. 430, p. 127276, 2022. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300322003502>>.

CHOI, B.; CHOI, M. General solution of the black–scholes boundary-value problem. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 509, p. 546–550, 2018. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437118308203>>.

CHUNG, S.-L.; SHIH, P.-T.; TSAI, W.-C. Static hedging and pricing american knock-in put options. **Journal of Banking and Finance**, v. 37, p. 191–205, 2013. ISSN 0378-4266. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426612002567>>.

COOK, D. O.; LUO, S. S. Fund flow-induced volatility and the cost of debt. **Journal of Banking & Finance**, v. 146, p. 106702, 2023. ISSN 0378-4266. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426622002825>>.

DAGLIS, T. et al. The forecasting ability of solar and space weather data on nasdaq's finance sector price index volatility. **Research in International Business and Finance**, v. 52, p. 101147, 2020. ISSN 0275-5319. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0275531919307639>>.

DANILIUK, E.; ROZHKOVA, S. Hedging of the barrier put option in a diffusion (b, s) – market in case of dividends payment on a risk active. **IFAC-PapersOnLine**, v. 48, p. 34–38, 2015. ISSN 2405-8963. 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO'2015. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315023137>>.

DEMUTH, H.; BEALE, M. **Neural Network Toolbox**. 1. ed. Natick, MA: MathWorks, 2004.

DENG, Z.; YAO, Y. Option pricing under market maker's inventory risk: A case study of china. **Finance Research Letters**, v. 66, p. 105616, 2024. ISSN 1544-6123. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1544612324006469>>.

DODD, R.; GRIFFITH-JONES, S. **Report on Derivatives Markets: Stabilizing or Speculative Impact on Chile and a Comparison with Brazil CEPAL/ECLAC with IADB support**. 2006. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=1647212Electroniccopyavailableat:https://ssrn.com/abstract=1647212Electroniccopyavailableat:http://ssrn.com/abstract=1647212>.

FACELI, K. et al. **Inteligência Artificial: Uma Abordagem de Aprendizado de Máquina**. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2023.

FERREIRA, T. A. E.; VASCONCELOS, G. C.; ADEODATO, P. J. L. A new intelligent system methodology for time series forecasting with artificial neural networks. **Neural Processing Letters**, v. 28, p. 113–129, 2008. ISSN 1573-773X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922009481>.

FILHO, O. G. **Inteligência Artificial e Aprendizagem de Máquina: aspectos teóricos e aplicações**. 1. ed. São Paulo - SP: Editora Blucher, 2023.

GAO, J. et al. Calibration of european option pricing model in uncertain environment: Valuation of uncertainty implied volatility. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 447, p. 115890, 2024. ISSN 0377-0427. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042724001390>.

GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. **Deep Learning**. 1. ed. Cambridge, MA: The Mit Press, 2016.

GUO, J.; KANG, W.; WANG, Y. Multi-perspective option price forecasting combining parametric and non-parametric pricing models with a new dynamic ensemble framework. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 204, p. 123429, 2024. ISSN 0040-1625. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040162524002257>.

HALPERIN, I. Non-equilibrium skewness, market crises, and option pricing: Non-linear langevin model of markets with supersymmetry. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 594, p. 127065, 2022. ISSN 0378-4371. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122001182>.

HAYKIN, S. **Redes Neurais**. 2. ed. Porto Alegre - RS: Bookman, 2001.

HUANG, C. et al. Error analysis of finite difference scheme for american option pricing under regime-switching with jumps. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 437, p. 115484, 2024. ISSN 0377-0427. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042723004284>.

HULL, J. C. **Opções, futuros e outros derivativos**. 9ª. ed. [S.l.]: Bookman, 2016.

HUSSAIN, S. et al. Pricing american options under azzalini ito-mckean skew brownian motions. **Applied Mathematics and Computation**, v. 451, p. 128040, 2023. ISSN 0096-3003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300323002096>.

IÓRIO, V. **EDP: um curso de graduação**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

LEE, H.; HA, H.; KONG, B. Pricing first-touch digitals with a multi-step double boundary and american barrier options. **Finance Research Letters**, v. 59, p. 104699, 2024. ISSN 1544-6123. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1544612323010711>>.

LI, L.; WU, Z. Defaultable perpetual american put option in a last passage time model. **Statistics & Probability Letters**, p. 110018, 2023. ISSN 0167-7152. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715223002419>>.

LIN, C.-Y. et al. Development of renewable energy resources by green finance, volatility and risk: Empirical evidence from china. **Renewable Energy**, v. 201, p. 821–831, 2022. ISSN 0960-1481. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148122015798>>.

LIN, L. et al. The numerical simulation of quanto option prices using bayesian statistical methods. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 567, p. 125629, 2021. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437120309274>>.

LIN, Z.; HAN, L.; LI, W. Option replication with transaction cost under knightian uncertainty. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 567, p. 125680, 2021. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843712030978X>>.

LO., A. **Derivative Pricing: A Problem-Based Primer**. 1. ed. New York.: CRC Press, 2018.

LU, X. et al. Dynamics of the return and volatility connectedness among green finance markets during the covid-19 pandemic. **Energy Economics**, v. 125, p. 106860, 2023. ISSN 0140-9883. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988323003584>>.

MA, Y.; SHI, C.; HON, Y. Generalized finite integration method with laplace transform for european option pricing under black–scholes and heston models. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 164, p. 105751, 2024. ISSN 0955-7997. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799724002169>>.

MOHAMMADIZADEH, F. et al. Numerical solution of ψ -hilfer fractional black–scholes equations via space–time spectral collocation method. **Alexandria Engineering Journal**, v. 71, p. 131–145, 2023. ISSN 1110-0168. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1110016823001680>>.

MOHSIN, M.; JAMAANI, F. A novel deep-learning technique for forecasting oil price volatility using historical prices of five precious metals in context of green financing – a comparison of deep learning, machine learning, and statistical models. **Resources Policy**, v. 86, p. 104216, 2023. ISSN 0301-4207. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301420723009273>>.

MOLERO, L.; MELLO, E. **Derivativos: Negociação e Precificação**. 2. ed. São Paulo - SP: Editora Saint Paul, 2020.

NIAN, K.; COLEMAN, T. F.; LI, Y. Learning sequential option hedging models from market data. **Journal of Banking and Finance**, v. 133, p. 106277, 2021. ISSN 0378-4266. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426621002338>>.

NICOLAU, J. **Modelação de Séries Temprais Financeiras**. 1. ed. Coimbra: Almedina, 2012.

OSPINA-FORERO, L.; GRANADOS, O. M. A network analysis of the structure and dynamics of fx derivatives markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 615, p. 128549, 2023. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437123001048>>.

PATSIUK, O.; KOVALENKO, S. Symmetry reduction and exact solutions of the non-linear black-scholes equation. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 62, p. 164–173, 2018. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570418300625>>.

PELLEGRINO, R.; COSTANTINO, N.; TAURO, D. Supply chain finance: A supply chain-oriented perspective to mitigate commodity risk and pricing volatility. **Journal of Purchasing and Supply Management**, v. 25, n. 2, p. 118–133, 2019. ISSN 1478-4092. Supply Chain Finance: Historical Foundations, Current Research, Future Developments. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1478409218300748>>.

RAO, S. C. S.; MANISHA. Numerical solution of generalized black-scholes model. **Applied Mathematics and Computation**, v. 321, p. 401–421, 2018. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300317306938>>.

RASHIDI, S.; HEJAZI, S. R.; MOHAMMADIZADEH, F. Group formalism of lie transformations, conservation laws, exact and numerical solutions of non-linear time-fractional black-scholes equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 403, p. 113863, 2022. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042721004866>>.

SHASHIASHVILI, M. The stochastic balance equation for the american option value function and its gradient. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 166, p. 104224, 2023. ISSN 0304-4149. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414923001886>>.

SHEN, J.; HUANG, W.; MA, J. An efficient and provable sequential quadratic programming method for american and swing option pricing. **European Journal of Operational Research**, 2023. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221723008512>>.

SHIRZADI, M. et al. American options pricing under regime-switching jump-diffusion models with meshfree finite point method. **Chaos, Solitons &**

Fractals, v. 166, p. 112919, 2023. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922010980>>.

SHVIMER, Y.; ZHU, S.-P. Pricing options with a new hybrid neural network model. **Expert Systems with Applications**, v. 251, p. 123979, 2024. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417424008455>>.

SONG, Y. et al. Exploring the impact of digital inclusive finance on consumption volatility: Insights from household entrepreneurship and income volatility. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 200, p. 123179, 2024. ISSN 0040-1625. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040162523008648>>.

WANG, S.; YUAN, F. The asymptotic behavior of the solutions of the black–scholes equation as volatility $\sigma \rightarrow 0+$. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 78, n. 3, p. 1037–1050, 2019. ISSN 0898-1221. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122119301531>>.

XIANG, J.; WANG, X. Quasi-monte carlo simulation for american option sensitivities. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 413, p. 114268, 2022. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042722001108>>.

YAN, D. et al. Pricing american options with stochastic volatility and small nonlinear price impact: A pde approach. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 163, p. 112581, 2022. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922007718>>.

YANG, Q. et al. How volatility in green financing, clean energy, and green economic practices derive sustainable performance through esg indicators? a sectoral study of g7 countries. **Resources Policy**, v. 75, p. 102526, 2022. ISSN 0301-4207. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030142072100533X>>.