

Felipe Fernando Ângelo Barreto

**Famílias transmutadas generalizadas: algumas medidas de  
informação e bondade de ajuste baseada na transformada de  
Mellin**

Recife

13 de setembro de 2024



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Famílias transmutadas generalizadas: algumas medidas de informação e bondade de ajuste baseada na transformada de Mellin**

**Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada**

**Orientador: Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**

**Coorientador: Dr. Josimar Mendes Vasconcelos**

**Recife**

**13 de setembro de 2024**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

B273f Barreto, Felipe Fernando Ângelo.  
Famílias transmutadas generalizadas: Algumas medidas de informação e bondade de ajuste baseada na transformada de Mellin / Felipe Fernando Ângelo Barreto. - Recife, 2024.  
98 f.; il.

Orientador(a): Frank Sinatra Gomes da Silva.  
Co-orientador(a): Josimar Mendes Vasconcelos.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Famílias transmutadas generalizadas. 2. Transformada de Mellin. 3. Medidas de bondade de Ajuste. 4. Medidas de informação 5. Estatística de Hotelling. I. Silva, Frank Sinatra Gomes da, orient. II. Vasconcelos, Josimar Mendes, coorient. III. Título

CDD 519.5

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Famílias transmutadas generalizadas: algumas medidas de informação e bondade de ajuste baseada na transformada de Mellin**

Felipe Fernando Ângelo Barreto

Orientador:

---

**Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**  
Orientador

Banca examinadora:

---

**Josimar Mendes de Vasconcelos**  
UFRPE

---

**Jader da Silva Jale**  
UFRPE

---

**Fernando Arturo Peña Ramirez**  
UNAL

---

**Renilma Pereira Da Silva**  
UFPB

*Este trabalho é dedicado às crianças  
adultas que, quando pequenas, sonharam em  
se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder sabedoria nas escolhas dos melhores caminhos, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção para me amparar.

Agradeço aos meus orientadores, professor Dr. Frank Gomes da Silva e professor Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos, pela paciência, confiança e orientações prestadas para a realização deste trabalho.

Agradeço a minha família, sempre tão presente em minha vida, me apoiando, dando força e compreendendo algumas ausências. Agradeço especialmente a minha esposa Olívia por estar ao meu lado em todos os momentos bons e difíceis em todos esses anos. Obrigado pelo incentivo, apoio, carinho, amor e compreensão. Você foi e será uma pessoa fundamental pra mim. Aos meus filhos, Dilon e Ravi, que vieram para alegrar e trazer mais amor a nossa família. Agradeço aos meus pais, Carlos e Maristela, por todo carinho, amor e esforço em me darem a melhor educação. Ao meu irmão João Carlos por ser mais que um irmão, por todos esses anos, só tenho a agradecer pela amizade, brincadeiras, etc. Sem todos eles não estaria aqui escrevendo os agradecimentos de uma tese de doutorado.

Aos colegas de doutorado, mestrado e também ex-alunos, pela colaboração e companheirismo, que de certa forma contribuíram com este trabalho (Marília, Edvaldo, Lucas, Natália, Marciele, Vaniele, etc).

Agradeço aos meus amigos Eberson, Rafael e Eliu, que desde a graduação sempre me ajudaram e contribuíram positivamente para essa conquista.

A todos os professores do programa de pós-graduação em biometria e estatística aplicada, pelos conhecimentos que me foram passados.

Agradeço a Universidade de Pernambuco, campus Garanhuns, por conceder o afastamento parcial das atividades para a realização deste trabalho. Aos colegas professores do colegiado de matemática, pelo incentivo durante toda a caminhada, em especial, aos professores Elizângelo, Diógenes, Dâmocles, Maurício, Irami, Janaína e Paulo. Manifesto também minha gratidão a Universidade Católica de Pernambuco, pelo apoio e incentivo. Serei eternamente grato ao professor José Carlos Argemiro, por todo aprendizado e convívio na UNICAP, sempre incentivando a me inscrever na seleção do doutorado. Aos professores Edjane, Mardônio, Vicente, Júlio e Izabelly, obrigado pelo apoio em todos os momentos que precisei de suporte durante o doutorado.

E para finalizar, não podia esquecer de agradecer à Capes e CNPQ.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

O estudo de modelos de distribuição de probabilidade é fundamental para a modelagem de dados em diversas áreas, como Análise de Sobrevivência, engenharia de confiabilidade, microbiologia e Hidrologia. Entre as diversas propostas na literatura, as famílias transmutadas generalizadas ganham destaque devido à sua flexibilidade, ampliando modelos já bem estabelecidos na área. Apesar de muitos trabalhos publicados que tratam sobre novos modelos ou classes de distribuições, poucos se destinam a desenvolver medidas de bondade de ajuste eficientes. Os objetivos desse trabalho são: (i) propor um novo critério de estimação e medidas de bondade de ajuste – considerando aspectos qualitativos e quantitativos – baseados na transformada de Mellin. Tais medidas de bondade de ajuste foram desenvolvidas utilizando-se a estatística de Hotelling e aplicadas, no primeiro momento, a quatro submodelos da classe transmutada-G: transmutada Weibull, transmutada Fréchet, transmutada log-logística e transmutada Pareto; e, posteriormente, a dois submodelos da classe Nova Transmutada-G: Nova Transmutada Weibull e Nova Transmutada Fréchet. Foi realizada uma simulação de Monte Carlo para a classe Transmutada-G afim de comparar o método de estimação proposto com o método de estimação já consolidado, baseado na máxima verossimilhança, no qual foi observado que o método proposto obteve melhor resultado. Para verificar o desempenho da metodologia proposta foram utilizadas bases de dados em análise de sobrevivência e dados de imagens *Synthetic Aperture Radar* (SAR). Este último tem sido indicado como uma ferramenta importante para resolver problemas de sensoriamento remoto, isso se deve a sua capacidade de operar independente de condições atmosféricas e produzir imagens em alta resolução espacial. Até o momento, não há registros na literatura no tocante a aplicação de modelos da classe transmutada-G a dados de imagens SAR. (ii) Explorar propriedades referentes a algumas medidas de informação para classe nova transmutada-G tais como entropia de Shannon, informação de Fisher e divergência média de Gini. A densidade da nova transmutada-G é escrita como uma mistura entre a distribuição-base e exponenciada da distribuição-base as quais são denominadas suas componentes. Além disso, medidas de divergência, como as de Kullback-Leibler e qui-quadrado, foram obtidas para medir a proximidade entre duas distribuições de probabilidade no âmbito de tal classe, isto é, entre a função densidade do gerador e suas componentes. Foi constatado que a divergência de Kullback-Leibler entre um modelo da nova transmutada-G e suas componentes está livre da distribuição-base. Além disso, a diferença média de Gini é expressa como a soma da diferença média de Gini de suas componentes.

**Palavras-chaves:** Famílias transmutadas generalizadas; Transformada de Mellin; Medidas de bondade de ajuste; Medidas de informação; Estatística de Hotelling.

# Abstract

The study of probability distribution models is fundamental for data modeling in several areas, such as Survival Analysis, reliability engineering, microbiology and Hydrology. Among the various proposals in the literature, generalized transmuted families stand out due to their flexibility, expanding models already well established in the area. Despite many published works that deal with new models or classes of distributions, few are aimed at developing efficient goodness-of-fit measures. The objectives of this work are: (i) to propose a new estimation criterion and goodness-of-fit measures – considering qualitative and quantitative aspects – based on the Mellin transform. Such goodness-of-fit measures were developed using Hotelling statistics and applied, initially, to four submodels of the transmuted-G class: transmuted Weibull, transmuted Fréchet, transmuted log-logistic and transmuted Pareto; and, later, two submodels of the new transmuted-G class: new transmuted Weibull and new transmuted Fréchet. A Monte Carlo simulation was carried out for the transmuted-G class in order to compare the proposed estimation method with the already consolidated estimation method, based on maximum likelihood, in which it was observed that the proposed method obtained better results. To verify the performance of the proposed methodology, survival analysis databases and Synthetic Aperture Radar (SAR) image data were used. The latter has been indicated as an important tool for solving remote sensing problems, due to its ability to operate independently of atmospheric conditions and produce images at high spatial resolution. To date, there are no records in the literature regarding the application of transmuted-G class models to SAR image data. (ii) Explore properties relating to some information measures for the new transmuted-G class such as Shannon entropy, Fisher information and mean Gini divergence. The density of the new transmuted-G is written as a mixture between the base distribution and the exponentiated base distribution, which are called its components. Furthermore, divergence measures, such as Kullback-Leibler and chi-square, were obtained to measure the proximity between two probability distributions within such a class, that is, between the generator's density function and its components. It was found that the Kullback-Leibler divergence between a model of the new transmuted-G and its components is free from the base distribution. Furthermore, the mean Gini difference is expressed as the sum of the mean Gini difference of its components.

**Key-words:** Generalized transmuted families; Mellin Transform; Goodness-of-Fit Measures; Information measures; Hotelling Statistics.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Gráfico da fdp dos modelos TW, TF, TLL e TP para alguns valores nos parâmetros.	22
Figura 2 – Diagrama de Log-cumulantes.	31
Figura 3 – Diagrama de Log-cumulantes separado por submodelos.	31
Figura 4 – RMSE para alguns parâmetros do modelo TW	38
Figura 5 – Diagrama mostrando os LCs teóricos para os modelos TW, TF, TLL e TP, bem como uma coleção de LCs representando os dados FA (✳), CV (✳), RF (✳), UR (✳), FC (✳).	40
Figura 6 – Elipses de confianças.	42
Figura 7 – Gráfico da fdp dos modelos NTW e NTF para diferentes valores dos parâmetros.	47
Figura 8 – Diagrama de LCs 2D e 3D dos modelos da classe NT-G.	64
Figura 9 – Aplicação dos bancos de dados FA, FC, DA e DR.	70
Figura 10 – Elipses de Confiança	72

# Lista de tabelas

Tabela 1 – A fdp dos modelos da classe T-G . . . . .	21
Tabela 2 – MPP da distribuição-base para classe T-G . . . . .	26
Tabela 3 – Transformada de Mellin para a distribuição-base da classe T-G . . . . .	27
Tabela 4 – Os três primeiros LCs dos modelos abordados . . . . .	28
Tabela 5 – Estatística Descritiva dos Dados . . . . .	40
Tabela 6 – Estatística $T^2$ de Hotelling e p-valor . . . . .	41
Tabela 7 – A fdp dos modelos da classe NT-G . . . . .	47
Tabela 8 – MPP da distribuição-base para classe NT-G . . . . .	61
Tabela 9 – Transformada de Mellin para a distribuição-base da classe NT-G . . . . .	62
Tabela 10 – LCs para as distribuições-base da NT-G. . . . .	63
Tabela 11 – Estatística Descritiva dos Dados para Classe NT-G . . . . .	69
Tabela 12 – Estatística $T^2$ de Hotelling e p-valor para Classe NT-G . . . . .	71

# Lista de abreviaturas e siglas

AIC	Critério de Informação de Akaike
fc	Função característica
fda	Função distribuição acumulada
fdp	Função densidade de probabilidade
T-G	Transmutada-G
TW	Transmutada Weibull
TF	Transmutada Fréchet
TLL	Transmutada Log-logística
TP	Transmutada Pareto
NT-G	Nova Transmutada-G
NTW	Nova Transmutada Weibull
NTF	Nova Transmutada Fréchet
LCs	Log-cumulantes
LMs	Log-momentos
MTQ	Mapa de Transmutação Quadrático
MPP	Momentos Ponderados de Probabilidade
MLC	Método de estimação por log-cumulantes
MMV	Método de estimação por máxima verossimilhança
DMG	Diferença média de Gini
SAR	<i>Synthetic Aperture Radar</i>

# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números Reais positivos
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números Complexos
$T^2$	Estatística de Hotelling
$\Phi_X(t)$	Função característica
$\phi_X$	Transformada de Mellin de uma função densidade de probabilidade
$\psi_X(s)$	Segunda função característica do segundo tipo
$f(x)$	Função densidade de probabilidade
$F(x)$	Função distribuição acumulada
$M_{l,j,k}$	Momentos de Probabilidade Ponderada
$Q(\cdot)$	Função quantílica
$\Gamma(\alpha)$	Função Gama completa
$B(\cdot, \cdot)$	Função Beta
$\tilde{m}_v$	Log-Momentos
$\tilde{k}_v$	Log-Cumulantes
$F_{v,n-v}$	Distribuição F com $v$ e $n - v$ graus de liberdade

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
1.1	Motivação	15
1.2	Objetivos	17
1.2.1	Objetivo Geral	17
1.2.2	Objetivos específicos	18
1.3	Organização da Tese	18
<b>2</b>	<b>Resultados Inferenciais baseados nas estatísticas tipo Mellin para Classe Transmutada-G</b>	<b>19</b>
2.1	Introdução	19
2.2	Classe Transmutada-G	20
2.2.1	Propriedades Matemáticas	22
2.2.2	Gerando números aleatórios	23
2.3	Método de Máxima Verossimilhança	24
2.4	Método dos Momentos	24
2.5	Transformada de Mellin	25
2.6	Momentos de Probabilidade Ponderada	25
2.7	Método dos Log-cumulantes	27
2.8	Diagrama de Log-Cumulantes	30
2.9	Método de estimação por LCs	32
2.10	Estatística de Hotelling - $T^2$ e Log-Cumulantes	33
2.11	Estudo de Simulação	36
2.12	Aplicação a dados reais	39
2.12.1	Base de dados e estatística descritiva	39
2.13	Conclusão	43
<b>3</b>	<b>Medidas de Informação e bondade de ajustes para Nova Classe Transmutada-G</b>	<b>44</b>
3.1	Introdução	44
3.1.1	Funções Distribuição e Densidade	46
3.1.2	Propriedades Informacionais	48
3.2	Transformada de Mellin	60
3.3	Momentos Ponderados de Probabilidade - MPP	60
3.4	Método dos Log-cumulantes	62
3.5	Diagrama de Log-cumulantes	63
3.6	Método de estimação por LCs	65

3.7	Estatística $T^2$ de Hotelling e LCs	65
3.8	Aplicações e experimentos numéricos	68
3.8.1	Aplicações	68
3.9	Conclusão	72
4	Conclusão	74
4.1	Considerações finais	74
	Referências Bibliográficas	76
	<b>Apêndices</b>	<b>82</b>
	<b>APÊNDICE A Estimação dos parâmetros por MLE</b>	<b>83</b>
A.1	Modelo TW	83
A.2	Modelo TF	83
A.3	Modelo TLL	84
A.4	Modelo TP	85
	<b>APÊNDICE B Demonstrações</b>	<b>86</b>
B.1	Prova da Proposição 2.7.1	86
B.2	Prova da Proposição 2.10.1	87
B.2.1	Modelo TW	87
B.2.2	Modelo TF	89
B.2.3	Modelo TLL	91
B.2.4	Modelo TP	93
	<b>APÊNDICE C Extensão da Classe T-G</b>	<b>96</b>
C.1	Transformada de Mellin	96
C.1.1	Submodelo NTW	96
C.1.2	Submodelo NTF	96
C.1.3	Submodelo NTLL	97
C.1.4	Submodelo NTP	97

# 1 Introdução

Neste capítulo, pretendemos dar razões para o estudo deste trabalho, além disso, apresentar as principais contribuições e a estrutura desta tese.

## 1.1 Motivação

Distribuições de probabilidade têm sido amplamente utilizadas para modelar dados em diversas áreas aplicadas como análise de sobrevivência (JENKINS, 2005), engenharia de confiabilidade (NACHLAS, 2017), microbiologia (MCKELLAR; LU; DELAQUIS, 2002) e Hidrologia (HUSSAIN; BAKOUCH; IQBAL, 2018). A quantidade de informação e/ou dados disponíveis para análise cresce cada vez mais rápido, fazendo com que novas distribuições probabilísticas sejam necessárias para melhor descrever as especificidades de cada fenômeno/experimento estudado. O fato de, alguns modelos, muitas vezes, não se ajustarem de forma satisfatória ao conjunto de dados reais em estudo, motiva a necessidade de estender as formas dessas distribuições. Com o advento de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas, tem sido possível utilizar distribuições com mais parâmetros para o ajuste de massa de dados (SILVEIRA et al., 2023).

Nos últimos anos, tem-se buscado, por meio de geradores de distribuições de probabilidade, estender os modelos clássicos (EUGENE; LEE; FAMOYE, 2002a). Brito et al. (2019) apresentaram um método para gerar distribuições de probabilidade e classes de distribuições chamado de método gerador multi-baseline. Outros exemplos como a classe de distribuição Marshall e Olkin (MG-G) (MARSHALL; OLKIN, 1997), a distribuição Weibull generalizada (LAI, 2014), a família Kumaraswamy-G (Kw-G) (CORDEIRO; CASTRO, 2011a), a gama estendida Weibull-G (NASCIMENTO et al., 2014) e a classe transmutada-G (T-G) (SHAW; BUCKLEY, 2007) são encontrados na literatura. A extensão dos modelos clássicos de probabilidade tem por finalidade aumentar a sua flexibilidade para modelagem dos dados. Grande parte das generalizações envolve a adição de um ou mais parâmetros à distribuição-base (RAHMAN et al., 2020).

Uma forma conveniente de construção de novas distribuições é utilizando mapas de transmutação. Shaw e Buckley (2009) foram os pioneiros nesse estudo utilizando uma técnica chamada mapa de transmutação quadrático (MTQ) para gerar uma família de distribuição flexível. Aryal e Tsokos (2009) definiram a distribuição generalizada transmutada de valores extremos e estudaram algumas características matemáticas básicas da distribuição Gumbel transmutada e suas aplicações a dados climáticos. Em 2015, Granzotto e Louzada (2015) propuseram e estudaram várias propriedades

estruturais da distribuição log-logística transmutada. [Cordeiro et al. \(2017\)](#) introduziram a distribuição Weibull transmutada modificada, que estende a distribuição Weibull transmutada ([ARYAL; TSOKOS, 2009](#)).

Embora as distribuições transmutadas sejam de particular importância na modelagem de várias fontes de dados, estes modelos foram pouco explorados do ponto de vista da teoria da informação. Recentemente, [Kharazmi e Balakrishnan \(2021\)](#) - com a classe transmutada generalizada - e [Saha, Kayal e Balakrishnan \(2022\)](#) - com a classe transmutada cúbica - desenvolveram algumas propriedades informacionais, incluindo entropia de Shannon, informação de Fisher e diferença média de Gini.

Na teoria da informação, existem diferentes critérios para medir a incerteza de um modelo probabilístico. Além disso, várias medidas de divergência foram desenvolvidas na literatura para medir a similaridade (proximidade) entre duas distribuições de probabilidade. A diferença média de Gini ([GINI, 1912](#)), a informação de Fisher ([FISHER, 1929](#)) e a entropia de Shannon ([SHANNON, 1948](#)) são três medidas de informação importantes que têm sido utilizadas em muitos campos diferentes. Mais recentemente, estas medidas de informação foram generalizadas com base na desigualdade de Jensen, que passaram a ser conhecidas como medidas de informação de Jensen-Shannon, Jensen-Fisher e Jensen-Gini, respectivamente. Para mais detalhes pertinentes, ver [Sánchez-Moreno, Zarzo e Dehesa \(2012\)](#) e [Mehrali, Asadi e Kharazmi \(2018\)](#).

As medidas de bondade de ajuste são métricas quantitativas que informam o quão bem um modelo está ajustado aos dados. Apesar de desempenharem um papel importante na modelagem estatística, essas medidas quando comparadas ao desenvolvimento de novos modelos probabilísticos têm experimentado um crescimento tímido. Alguns trabalhos que propuseram medidas de bondade de ajuste para modelos de probabilidade foram [Pearson \(1895\)](#), [McQuarrie e Tsai \(1998\)](#) e [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#).

[Pearson \(1895\)](#) propôs um critério para seleção de modelos baseado em medidas de assimetria e curtose. Seus diagramas foram aplicados a dados hidrológicos ([VOGEL; FENNESSEY, 1993](#)) e a seleção de modelos de séries temporais relacionados a mercado de trabalho de *commodities*. ([ANDREEV; KANTO; MALO, 2007](#)). No entanto, [Nicolas \(2005\)](#) mostrou que o método de Pearson apresenta uma solução analítica difícil e não se adequa a variáveis aleatórias positivas. Já [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#) propuseram uma medida de bondade de ajuste baseada na distância entre a função distribuição acumulada (fda) e a função distribuição empírica, sendo uma medida limitada, pois nem sempre possui solução analítica.

[Nicolas e Anfinson \(2002\)](#) apresentaram um diagrama alternativo, semelhante àquele de Pearson, chamado diagrama de log-cumulantes ( $\tilde{k}_3, \tilde{k}_2$ ) que ao invés de utilizar índices de assimetria e curtose, propõe um diagrama baseado nas estatísticas  $\tilde{k}_3$  e  $\tilde{k}_2$  que são conhecidas como log-cumulantes de segundo tipo. A ideia foi propor a aplicação da transformada de Mellin como uma alternativa à função característica usual, definindo assim a função característica do tipo II, e conseqüentemente os

log-momentos e log-cumulantes do tipo II. O diagrama de log-cumulantes plota os log-cumulantes,  $\tilde{k}_3$  contra  $\tilde{k}_2$ , como alternativa gráfica para comparação dos modelos.

Os estimadores a partir de estatísticas tipo Mellin admitem variância menor do que aquelas a partir de momentos e log-cumulantes (NICOLAS; ANFINSEN, 2002). Como destacado por esses autores, tal metodologia desempenha um papel essencial em processamento de sinal e imagem por ser de fácil implementação. Baseado nela, Vasconcelos, Cintra e Nascimento (2021) desenvolveram um importante estudo na área de análise de sobrevivência considerando o bem conhecido gerador beta-G.

Neste trabalho, a combinação de momentos ponderados de probabilidade (MPP) e transformada de Mellin é proposta para fornecer novas medidas de bondade de ajuste para seleção de modelos de famílias transmutadas generalizadas. Uma expressão geral da transformada de Mellin é introduzida para distribuições pertencentes à classe transmutada-G (T-G) e nova transmutada-G (NT-G) (AHMAD, 2020). Quatro modelos foram separados para investigação da família T-G: transmutada Weibull (TW) (ARYAL; TSOKOS, 2011), transmutada Fréchet (TF) (MAHMOUD; MANDOUH, 2013), transmutada log-logística (TLL) (GRANZOTTO; LOUZADA, 2015) e transmutada Pareto (TP) (MEROVCI; PUKA, 2014), e dois modelos para a classe NT-G: nova transmutada Weibull (NTW) e nova transmutada Fréchet (NTF). Além disso, foram exploradas propriedades referentes a algumas medidas de informação para classe NT-G, tais como entropia de Shannon, informação de Fisher e divergência média de Gini (DMG). A densidade da nova transmutada-G é escrita como uma mistura entre a distribuição-base e exponenciada da distribuição-base as quais são denominadas suas componentes. Além disso, medidas de divergência, como as de Kullback-Leibler e qui-quadrado, foram obtidas para medir a proximidade entre duas distribuições de probabilidade no âmbito de tal classe, isto é, entre a função densidade do gerador e suas componentes. Também é proposta uma relação entre a estatística  $T^2$  de Hotelling e o método delta para obter as elipses de confiança para testes de hipóteses, nos quais os cumulantes do segundo tipo estão envolvidos. Por fim, cinco bases de dados reais no contexto da análise de sobrevivência e processamento de imagem são submetidas à metodologia proposta do modelo T-G, e quatro bancos de dados ao modelo NT-G.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Propor um novo critério de estimação e medidas de bondade de ajuste - considerando aspectos qualitativos e quantitativos - baseados na transformada de Mellin para as classes T-G e NT-G. Além disso, explorar propriedades matemáticas referentes as medidas de informação no âmbito da NT-G.

### 1.2.2 Objetivos específicos

1. Obter expressões para a transformada de Mellin das distribuições TW, TF, TLL e TP;
2. Desenvolver os log-cumulantes do segundo tipo;
3. Construir os estimadores baseados nos log-cumulantes do segundo tipo;
4. Propor uma nova metodologia alternativa ao diagrama de Pearson para algumas distribuições T-G como esquema qualitativo para as medidas de bondade de ajuste;
5. Obter a estatística  $T^2$  de Hotelling com base nos Log-cumulantes estimados;
6. Realizar simulações de Monte Carlo para avaliar o desempenho dos estimadores propostos;
7. Aplicar bancos de dados no contexto da análise de sobrevivência e processamento de imagens;
8. Determinar uma expressão para entropia de Shannon da classe NT-G;
9. Calcular a informação de Fisher de um parâmetro da Classe NT-G;
10. Demonstrar que a DMG para a classe NT-G pode ser escrita em termos da DMG de suas componentes.

## 1.3 Organização da Tese

A tese está organizada em quatro capítulos: o primeiro contém a introdução do trabalho o qual apresentamos a motivação, os objetivos gerais e específicos, as contribuições e a organização da tese. No segundo capítulo, destacamos as medidas de bondade de ajuste para a classe transmutada-G. Já no terceiro capítulo, a partir da nova classe transmutada-G, desenvolvemos propriedades referentes à medida de informação, além de propormos novas medidas de bondade de ajuste. Por fim, o último capítulo aborda as principais conclusões desta tese e algumas propostas para trabalhos futuros.

## 2 Resultados Inferenciais baseados nas estatísticas tipo Mellin para Classe Transmutada-G

### 2.1 Introdução

Os estudos recentes sobre teoria de distribuição têm destaque na família de distribuição transmutada, a qual foi introduzida por [Shaw e Buckley \(2007\)](#) a partir de um mapa de transmutação quadrático, que consiste da composição de uma acumulada (de uma distribuição) com a função quantílica de outra distribuição. Tal família admite uma construção estocástica como uma mistura por meio de estatísticas de ordem. Com ideia semelhante, [Balakrishnan e He \(2021\)](#) apresentaram uma nova família de distribuição transmutada baseada na teoria dos valores *record*. Durante a última década, esforços consideráveis foram direcionados para o desenvolvimento de distribuições mais flexíveis com o uso desta construção. Muitas distribuições clássicas de probabilidade foram generalizadas e desenvolvidas em alguns modelos flexíveis ([SARABIA; RAJA; ASHA, 2020](#); [DEY et al., 2021](#)). Já [Nofal et al. \(2017\)](#), introduziram uma nova classe de distribuições contínuas chamada família transmutada-G generalizada, que estende o mapa de transmutação quadrático iniciado por Shaw e Buckley. A extensão dos modelos clássicos de probabilidade tem por finalidade aumentar a sua flexibilidade para modelagem dos dados. Grande parte das generalizações envolve a adição de um ou mais parâmetros à distribuição-base ([RAHMAN et al., 2020](#)).

As medidas de bondade de ajuste são métricas quantitativas que informam o quão bem um modelo está ajustado aos dados. Apesar de desempenharem um papel importante na modelagem estatística, essas medidas quando comparadas ao desenvolvimento de novos modelos têm experimentado um crescimento tímido. Alguns trabalhos que propuseram medidas de bondade de ajuste para modelos de probabilidade foram [Pearson \(1895\)](#), [McQuarrie e Tsai \(1998\)](#) e [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#). Uma boa revisão de medidas de qualidade de ajuste para a distribuição Pareto e suas extensões pode ser encontrada em [Chu, Dickin e Nadarajah \(2019\)](#).

[Pearson \(1895\)](#) propôs um critério para seleção de modelos baseado em medidas de assimetria e curtose. No entanto, [Nicolas \(2005\)](#) mostrou que o método de Pearson apresenta uma solução analítica difícil e não se adequa a variáveis aleatórias positivas. O critério de informação de Akaike (AIC), apesar de ser bem conhecido e levar em conta a função de verossimilhança, não é eficaz na seleção de modelos não encaixados. Já [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#) propuseram uma medida de bondade de ajuste baseada na distância entre a função distribuição acumulada (fda) e a função distribuição empírica, sendo uma medida limitada, pois nem sempre possui solução analítica.

O trabalho de [Nicolas e Anfinzen \(2002\)](#) introduziu um novo diagrama, o de Log-Cumulantes  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$ , que se assemelha ao diagrama de Pearson, porém, em vez de se basear em índices de assimetria e curtose, é fundamentado nas estatísticas  $\tilde{k}_3, \tilde{k}_2$ . Há casos na literatura que o diagrama de Pearson pode ser analiticamente intratável e não se aplica quando o suporte da distribuição for positivo. A proposta de [Nicolas e Anfinzen \(2002\)](#) consistiu em sugerir o uso da transformada de Mellin como uma alternativa à função característica convencional, resultando na definição da função característica do tipo II e, por conseguinte, nos log-momentos e log-cumulantes do tipo II. O diagrama LC representam os log-cumulantes,  $\tilde{k}_3$  contra  $\tilde{k}_2$ , como alternativa gráfica para comparação dos modelos.

Os estimadores a partir de estatísticas tipo Mellin admitem variância menor do que aquelas a partir de momentos e log-cumulantes genuínos ([NICOLAS; ANFINSEN, 2002](#)). Como destacado por esses autores tal metodologia desempenha um papel essencial em processamento de sinal e imagem por ser de fácil implementação. Baseado nas estatísticas de tipo II, [Vasconcelos, Cintra e Nascimento \(2021\)](#) desenvolvem um importante estudo na área de análise de sobrevivência considerando o bem conhecido gerador beta-G. Um estudo adicional significativo, derivado dessa metodologia, foi conduzido por [Orozco Vasconcelos \(2023\)](#), que empregaram a transmutada inversa Weibull.

Neste capítulo, a combinação de momentos ponderados de probabilidade (MPP) e Transformada de Mellin é proposta para fornecer novas medidas de bondade de ajuste para seleção de modelos da família T-G. Uma expressão geral da transformada de Mellin é introduzida para distribuições pertencentes à classe T-G. Quatro modelos foram separados para investigação: TW ([ARYAL; TSO-KOS, 2011](#)), TF ([MAHMOUD; MANDOUH, 2013](#)), TLL ([GRANZOTTO; LOUZADA, 2015](#)) e TP ([MEROVCI; PUKA, 2014](#)). Além disso, é proposta uma relação entre a estatística  $T^2$  de Hotelling e o método delta para obter as elipses de confiança e testes de hipóteses, nos quais os cumulantes de segundo tipo estão envolvidos. Por fim, cinco bases de dados reais no contexto da análise de sobrevivência e processamento de imagem são submetidas à metodologia proposta.

## 2.2 Classe Transmutada-G

A classe de distribuição T-G agrega uma variedade de modelos que podem ser usados em vários estudos nas áreas de análise de sobrevivência e processamento de imagem. Proposta por [Shaw e Buckley \(2009\)](#), a família T-G tem a seguinte definição: *Uma variável aleatória X segue a classe de distribuição T-G se sua função distribuição acumulada (fda) e sua função densidade de probabilidade (fdp) são definidas através do método MTQ, respectivamente, por* ([GHOSH; CORDEIRO; BOURGUIGNON, 2016, p. 2](#))

$$F(x) = F(x, \boldsymbol{\xi}, \lambda) = (1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^2, \quad |\lambda| \leq 1 \quad (2.1)$$

e

$$f(x) = f(x; \boldsymbol{\xi}, \lambda) = [1 + \lambda - 2\lambda G(x; \boldsymbol{\xi})]g(x; \boldsymbol{\xi}), \quad |\lambda| \leq 1 \quad (2.2)$$

em que  $G(x; \boldsymbol{\xi})$  e  $g(x; \boldsymbol{\xi})$  são, respectivamente, fda e fdp da distribuição-base.

O parâmetro  $\lambda$  é considerado um parâmetro de forma. Ambas funções dependem do vetor paramétrico adicional  $\boldsymbol{\xi}$ . Para  $\lambda = 0$ , a classe T-G reduz-se à distribuição-base  $G$ . De maneira simples e intuitiva, [Kozubowski e Podgórski \(2016\)](#) interpretaram a construção do MTQ da seguinte forma: Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição  $G(x)$ . Então, se

$$Y \stackrel{d}{=} \begin{cases} \min(X_1, X_2), & \text{com probabilidade } \pi, \\ \max(X_1, X_2), & \text{com probabilidade } (1 - \pi), \end{cases}$$

em que,  $\stackrel{d}{=}$  significa igualmente distribuída, temos a seguinte distribuição de  $Y$ :

$$F_Y(x) = \pi \Pr(\min(X_1, X_2) \leq x) + (1 - \pi) \Pr(\max(X_1, X_2) \leq x).$$

Note que, se  $F_{(\min)}(x) = 1 - [1 - G(x)]^2$  e  $F_{(\max)}(x) = [G(x)]^2$ , temos:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \pi[1 - (1 - G(x))^2] + (1 - \pi)G^2(x) \\ &= 2\pi G(x) + (1 - 2\pi)G^2(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Se tomarmos  $2\pi - 1 = \lambda$ , a Expressão 2.3 é simplesmente a função de distribuição da classe T-G.

As distribuições TW, TF, TLL e TP serão exploradas neste capítulo como exemplos de submodelos da classe T-G. A fdp de cada modelo associada a (2.2) está apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – A fdp dos modelos da classe T-G

Modelo	$f(x)$	Parâmetros $\times$ Suporte
TW	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\} \left[1 - \lambda + 2\lambda \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}\right]$	$ \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma > 0, x \geq 0$
TF	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\eta+1} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\eta\right\} \left[1 + \lambda - 2\lambda \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\eta\right\}\right]$	$ \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma > 0, x > 0$
TLL	$\frac{e^\sigma \eta x^{\eta-1} [(1 + e^\sigma x^\eta) - \lambda (e^\sigma x^\eta - 1)]}{(1 + e^\sigma x^\eta)^3}$	$ \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma \in \mathbb{R}, x > 0$
PT	$\frac{\eta}{x} \left(\frac{\sigma}{x}\right)^\eta \left[1 - \lambda + 2\lambda \left(\frac{\sigma}{x}\right)^\eta\right]$	$ \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma > 0, x > \sigma$

A Figura 1 ilustra a flexibilidade da fdp dos submodelos para alguns valores de parâmetros selecionados.

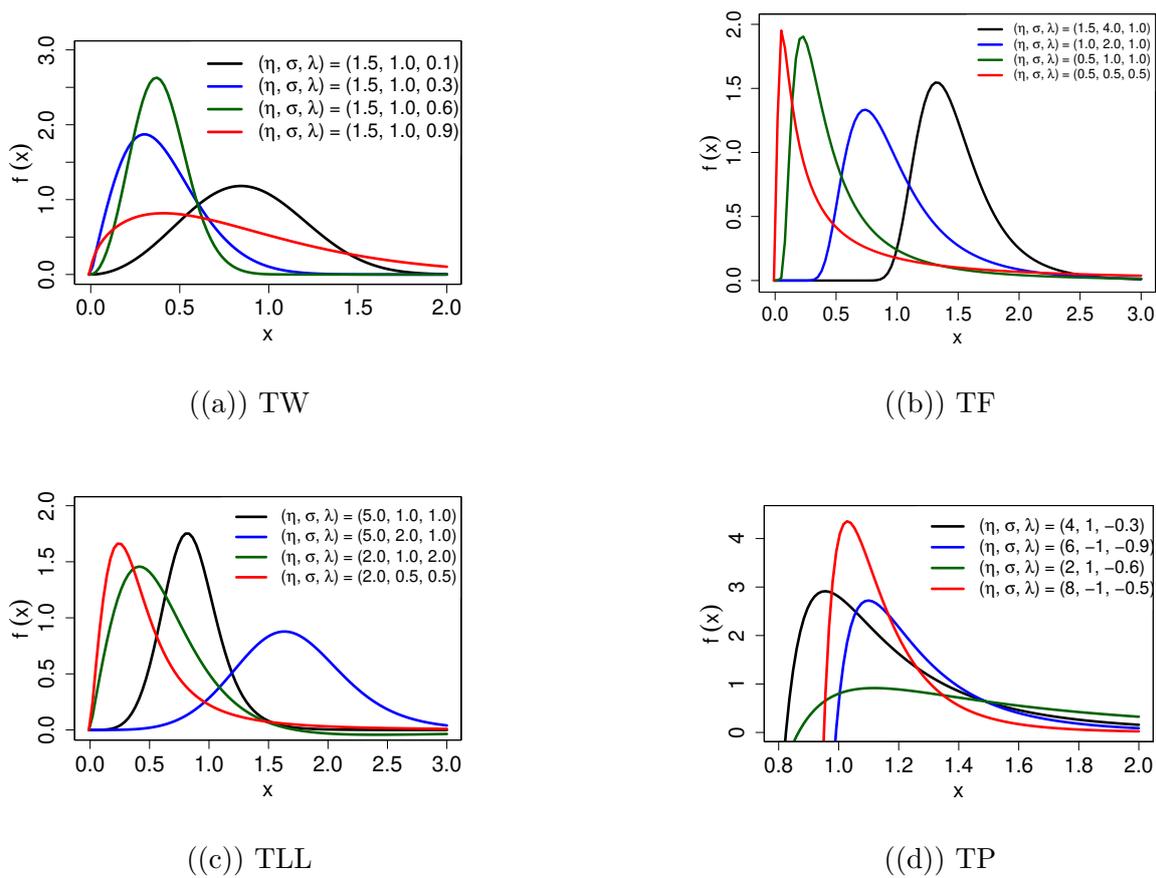


Figura 1 – Gráfico da fdp dos modelos TW, TF, TLL e TP para alguns valores nos parâmetros.

## 2.2.1 Propriedades Matemáticas

Algumas das características mais importante de uma distribuição estatística (tendência, dispersão, assimetria e curtose) podem ser estudadas através dos momentos. O  $r$ -ésimo Momento de  $X \sim T - G(\xi, \lambda)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \\
 &= (1 + \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x) dx - 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^r G(x) g(x) dx \\
 &= (1 + \lambda)\gamma_{r_1} - 2\lambda\gamma_{r_2},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que  $\gamma_{r_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x) dx$  e  $\gamma_{r_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r G(x) g(x) dx$ . Note que, a equação (2.4) fornece uma expressão geral para os momentos de ordem  $r$  da classe T-G, portanto, pode ser usada para obter os momentos ordinários de qualquer submodelo especial da família T-G. Além disso, a função geradora

de momentos é dada por:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \cdot E(X^r). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se  $X$  segue a classe T-G, então a função quantílica de  $X$  é dada por:

$$X = Q(u) = Q_F \left[ ((1 + \lambda)u - \lambda u^{1/2}); \xi \right] \quad (2.6)$$

em que  $Q_F(\cdot; \cdot) = F^{-1}(\cdot; \cdot)$  é a função quantílica da distribuição-base.

## 2.2.2 Gerando números aleatórios

Usando o método de inversão, podemos gerar números aleatórios a partir das distribuições TW, TF, TLL e TP. Esses números aleatórios serão utilizados na Seção 2.11 para verificar o desempenho dos estimadores a partir da simulação de Monte Carlo. Mostramos a seguir o passo a passo do método de inversão para o submodelo TW.

Seja  $F(x) = \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}\right) \left(1 + \lambda \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}\right)$  a fda da distribuição TW. A equação  $F(x) = u$ , em que  $u \sim U(0, 1)$ , resulta em:

$$\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}\right] \left[1 + \lambda \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}\right] = u. \quad (2.7)$$

Para simplificar os cálculos, considere  $a = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}$ . Rescrevendo a equação (2.7), temos:

$$\begin{aligned} (1 - a)(1 + \lambda a) &= u \\ 1 + \lambda a - a - \lambda a^2 &= u \\ \lambda a^2 + (1 - \lambda)a + (u - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Resolvendo a equação do 2º grau (2.8) para  $a$ , segue que

$$a = \frac{-(1 - \lambda) \pm \sqrt{(1 - \lambda)^2 - 4\lambda(u - 1)}}{2\lambda}$$

Substituindo  $a = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\}$ , a solução da equação (2.7) é:

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\} &= \frac{-(1 - \lambda) \pm \sqrt{(1 - \lambda)^2 - 4\lambda(u - 1)}}{2\lambda} \\ -\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta &= \log\left(\frac{-(1 - \lambda) \pm \sqrt{(1 - \lambda)^2 - 4\lambda(u - 1)}}{2\lambda}\right) \\ x &= \sigma \left\{-\log\left(\frac{\lambda - 1 \pm \sqrt{(1 - \lambda)^2 - 4\lambda(u - 1)}}{2\lambda}\right)\right\}^{1/\eta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esse processo de inversão para os demais submodelos encontra-se no Apêndice B.

## 2.3 Método de Máxima Verossimilhança

Para estimar os parâmetros das distribuições TW, TF, TLL e TP apresentamos nesta seção o método de máxima verossimilhança (MMV).

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da classe T-G. Então,

$$L(\boldsymbol{\xi}, \lambda; x_i) = \prod_{i=1}^n g(x_i; \boldsymbol{\xi}) [1 + \lambda - 2\lambda G(x_i; \boldsymbol{\xi})], \quad (2.10)$$

em que  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  são os valores observados da amostra aleatória. A função log-verossimilhança é dada por

$$l(\boldsymbol{\xi}, \lambda; x_i) = \log(L) = \sum_{i=1}^n \log g(x_i; \boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda - 2\lambda G(x_i; \boldsymbol{\xi})). \quad (2.11)$$

As componentes da função escore  $U(\boldsymbol{\xi}, \lambda) = (U_{\boldsymbol{\xi}}, U_{\lambda})^T$  são

$$U_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g(x_i; \boldsymbol{\xi}) / \partial \xi_k}{g(x_i; \boldsymbol{\xi})} \right) - 2\lambda \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G(x_i; \boldsymbol{\xi}) / \partial \xi_k}{1 + \lambda - 2\lambda G(x_i; \boldsymbol{\xi})} \right) \quad (2.12)$$

e

$$U_{\lambda} = -2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{G(x_i; \boldsymbol{\xi})}{1 + \lambda - 2\lambda G(x_i; \boldsymbol{\xi})} \right). \quad (2.13)$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\lambda})^T$  de  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\xi}, \lambda)^T$  é obtido maximizando a função (2.11), isto é, resolvendo o sistema de equação  $U_{\xi_k} = 0$  e  $U_{\lambda} = 0$ . Faz necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas, o qual utilizamos o método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e o pacote BB no software R para encontrar a estimação dos parâmetros.

## 2.4 Método dos Momentos

O método dos momentos (MM) é utilizado para estimação de parâmetros populacionais. É um dos métodos mais antigos e também um dos mais simples, que consiste em igualar os momentos amostrais com os momentos teóricos. Seja  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim T-G(\boldsymbol{\xi}, \lambda)$ , então o  $r$ -ésimo momento amostral é definido por:

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r. \quad (2.14)$$

Além disso, considere o  $r$ -ésimo momento populacional, com ( $r > 0$ ) inteiro,

$$u_r = E[X^r]. \quad (2.15)$$

Os estimadores para  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\xi}, \lambda)$  pelo Método dos Momentos são obtidos resolvendo a equação  $m_r = u_r$ , para  $r = 1, 2, 3$ . A função *dfsane*, método BFGS e o pacote BB foram utilizados no software R para obtenção dos estimadores.

## 2.5 Transformada de Mellin

A função característica (fc) genuína, que ora denominamos de Tipo I, possui propriedades importantes que servem para demonstrações de teoremas e alguns resultados na estatística. Além disso, pode ser utilizada para escrever a distribuição de probabilidade como uma transformada de Fourier sobre a fdp. Seja  $X$  uma variável aleatória com fda  $F(x)$ . Então, sua fc,  $\Phi_X(t)$ , é definida como (BILLINGSLEY, 2008):

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ .

Entretanto, há casos em que a fc é analiticamente intratável. Para contornar esta dificuldade, Colombo (1959) sugeriu a transformada de Mellin como uma alternativa à transformada de Fourier. Desenvolvida por Robert Hjalmar Mellin, essa transformada se aplica a diversas áreas tais como matemática, física e engenharia, e “possui suas maiores aplicações na área da estatística quando a variável estudada assume valores em  $\mathbb{R}_+$ ” (NICOLAS, 2005).

Seja  $X$  uma variável aleatória que assume valores reais não negativos e com fda  $F(x)$ . A primeira fc do tipo II é definida pela Transformada de Mellin como:

$$\phi_X(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} dF(x) = E(X^{s-1}), \quad (2.16)$$

em que  $s \in \mathbb{C}$  é uma variável complexa. A segunda fc do tipo II, é o logaritmo natural de  $\phi_X(s)$ :

$$\psi_X(s) = \log[\phi_X(s)]. \quad (2.17)$$

Na próxima subseção mostramos que a Transformada de Mellin da classe T-G pode ser obtida diretamente pelos MPP da distribuição-base.

## 2.6 Momentos de Probabilidade Ponderada

Os MPP, denotados por  $M_{i,j,k}$ , são generalizações dos momentos usuais para distribuições de probabilidade e foi introduzido por Greenwood et al. (1979). Eles são definidos por:

$$\begin{aligned} M_{i,j,k} &= E\{X^i F(X)^j [1 - F(X)]^k\} \\ &= \int_0^1 Q[F(x)]^i F(x)^j [1 - F(x)]^k dF(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que  $i, j, k \in \mathbb{R}$  e  $Q(\cdot)$  representa a função quantílica (fq) da fda.

A partir do trabalho de VASCONCELOS (2018), foi construída a Tabela 2 que mostra os MPP das distribuições-base para dois casos específicos que serão utilizados no Teorema 2.6.1.

Tabela 2 – MPP da distribuição-base para classe T-G

Modelos	$M_{i,j,k}$	$M_{i,0,0}$	$M_{i,1,0}$
Weibull	$\sigma^i \Gamma \left(1 + \frac{i}{\eta}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{j}{r} \frac{(-1)^r}{(k+r+1)^{1+i/\eta}}$	$\sigma^i \Gamma \left(1 + \frac{i}{\eta}\right)$	$\sigma^i \Gamma \left(1 + \frac{i}{\eta}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{1+i/\eta}}\right)$
Fréchet	$\sigma^i \Gamma \left(1 - \frac{i}{\eta}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{(j+r+1)^{1-i/\eta}}$	$\sigma^i \Gamma \left(1 - \frac{i}{\eta}\right)$	$\sigma^i \Gamma \left(1 - \frac{i}{\eta}\right) \left(\frac{1}{2^{1-i/\eta}}\right)$
log-logística	$\sigma^i B \left(j + \frac{i}{\eta} + 1, k - \frac{i}{\eta} + 1\right)$	$\sigma^i B \left(1 + \frac{i}{\eta}, 1 - \frac{i}{\eta}\right)$	$\sigma^i B \left(2 + \frac{i}{\eta}, 1 - \frac{i}{\eta}\right)$
Pareto	$\sigma^i B(k+1-\eta, j+1)$	$\sigma^i B(1-\eta, 1)$	$\sigma^i B(1-\eta, 2)$

Nessa Tabela  $\Gamma(\cdot; \cdot)$  e  $B(\cdot; \cdot)$  denotam, respectivamente, as funções gama e beta.

**Teorema 2.6.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com fdp dada por (2.2), então a primeira fc do tipo II é calculado por

$$\phi_X(s) = (1 + \lambda) \cdot M_{s-1,0,0} - 2\lambda \cdot M_{s-1,1,0}, \quad |\lambda| \leq 1, \quad (2.19)$$

com  $s \in \mathbb{C}$ , e  $M_{i,j,k}$  o MPP da distribuição-base.

*Demonstração.* Seja  $f(x) = g(x)[(1 + \lambda) - 2\lambda G(x)]$  a fdp da classe T-G, onde  $G(x)$  é a fda da distribuição-base. Então,

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= E \{X^{s-1}\} = \int x^{s-1} f(x) dx \\ &= \int x^{s-1} g(x) [(1 + \lambda) - 2\lambda G(x)] dx \\ &= \int x^{s-1} g(x) (1 + \lambda) dx - \int x^{s-1} g(x) 2\lambda G(x) dx \\ &= (1 + \lambda) \int x^{s-1} g(x) dx - 2\lambda \int x^{s-1} G(x) g(x) dx \\ &= (1 + \lambda) \int x^{s-1} dG(x) - 2\lambda \int x^{s-1} G(x) dG(x) \\ &= (1 + \lambda) M_{s-1,0,0} - 2\lambda M_{s-1,1,0}. \end{aligned}$$

□

Utilizando o Teorema 2.6.1, foi construída a Tabela 3 em que é possível observar as expressões para Transformada de Mellin dos modelos abordados neste trabalho.

Tabela 3 – Transformada de Mellin para a distribuição-base da classe T-G

Modelo	Transformada de Mellin
TW	$\sigma^{s-1}\Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) [1 - \lambda + \lambda 2^{-(s-1)/\eta}]$
TF	$\sigma^{s-1}\Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right) [1 + \lambda - \lambda 2^{(s-1)/\eta}]$
TLL	$\left[1 - \lambda \frac{(s-1)}{\eta}\right] \sigma^{s-1} B\left(1 + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta}\right)$
TP	$\left[\frac{2 - \eta(1 + \lambda)}{2 - \eta}\right] \sigma^{s-1} B(1 - \eta, 1)$

## 2.7 Método dos Log-cumulantes

Os log-momentos (LMs) de segundo tipo também derivam da transformada de Mellin, assim como os momentos provém da fc. Deste modo, os LMs ou  $\tilde{m}_v$  com  $v \in \mathbb{N}$ , são definidos por (NICOLAS; ANFINSEN, 2002):

$$\tilde{m}_v = \left. \frac{d^v \phi_X(s)}{ds^v} \right|_{s=1}, \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Os log-cumulantes (LCs) de ordem  $v$  do tipo II, são obtidos a partir da  $v$ -ésima derivada da segunda fc do tipo II, quando  $s = 1$ :

$$\tilde{k}_v = \left. \frac{d^v \psi_x(s)}{ds^v} \right|_{s=1} = \left. \frac{d^v \log[\phi_X(s)]}{ds^v} \right|_{s=1}, \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Existe uma relação analítica entre os LMs e LCs, similarmente aos momentos clássicos e seus LCs (LEHMANN; CASELLA, 2006). Os três primeiros LCs podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \tilde{m}_1, \\ \tilde{k}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2, \\ \tilde{k}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_1^3. \end{cases} \quad (2.22)$$

De maneira geral, os LCs de ordem  $v$  podem ser generalizados, como (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011):

$$\tilde{k}_v = \tilde{m}_v - \sum_{r=1}^{v-1} \binom{v-1}{r-1} \tilde{k}_r \tilde{m}_{v-r}, \quad (2.23)$$

em que  $\tilde{m}_v$  pode ser substituído pelos LMs amostrais:

$$\hat{\tilde{m}}_v = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (\log x_r)^v, \quad (2.24)$$

sendo  $n$  o tamanho da amostra e  $x_r$  é a  $r$ -ésima observação da amostra.

Na Tabela 4 são apresentados os três primeiros LCs para os modelos citados da classe T-G, em que  $\psi^{(n)}(x)$  é a função poligama de ordem  $n$ .

Tabela 4 – Os três primeiros LCs dos modelos abordados

Modelos	$\tilde{k}_1$	$\tilde{k}_2$	$\tilde{k}_3$
TW	$\log(\sigma) + \frac{1}{\eta}[\psi(1) - \lambda \log 2]$	$\frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + \lambda(1 - \lambda) \log^2 2]$	$\frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) - (1 - \lambda)\lambda(1 - 2\lambda) \log^3 2]$
TF	$\log(\sigma) - \frac{1}{\eta}[\psi(1) + \lambda \log 2]$	$\frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) - \lambda(1 + \lambda) \log^2 2]$	$-\frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) + \lambda(1 + \lambda)(1 + 2\lambda) \log^3 2]$
TLL	$\log(\sigma) + \frac{1}{\eta}(-\lambda)$	$\frac{1}{\eta^2} [2\psi^{(1)}(1) - \lambda^2]$	$\frac{1}{\eta^3} (-2\lambda^3)$
TP	$\log(\sigma) + \frac{1}{2\eta}(2 - \lambda)$	$\frac{1}{(2\eta)^2} [5 - (1 + \lambda)^2]$	$\frac{1}{(2\eta)^3} [18 - 2(1 + \lambda)^3]$

A proposição a seguir trata de uma generalização para os log-cumulantes dos modelos TLL e TP. A demonstração é feita no Apêndice A.

**Proposição 2.7.1.** O LC de ordem  $v$ , com  $v \in \mathbb{N}$  e  $v > 1$ , para os modelos TLL e TP são, respectivamente,

1.  $\tilde{k}_v = \frac{1}{\eta^v} [\psi^{(v-1)}(1) + (-1)^v \psi^{(v-1)}(1) - (v-1)! \lambda^v]$ ,
2.  $\tilde{k}_v = \frac{(v-1)!}{(2\sigma)^v} [2^v + 1 - (1 + \lambda)^v]$ .

*Demonstração.* Prova por indução simples em  $v$ .

Para a primeira etapa desta demonstração, considere  $v = 2$ . Por definição, tem-se que

$$\tilde{k}_2 = \left. \frac{d^2 \psi_X(s)}{ds^2} \right|_{s=1} = \left. \frac{d^2 \log[\phi_X(s)]}{ds^2} \right|_{s=1}.$$

Substituindo a expressão da transformada de Mellin da distribuição TLL obtida em Tabela 3 na função  $\phi_X$ , tem-se

$$\tilde{k}_2 = \left. \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \log \left[ \left( 1 - \lambda \frac{(s-1)}{\eta} \right) \sigma^{s-1} B \left( 1 + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right] \right\} \right|_{s=1}.$$

Aplicando a propriedade de logaritmos e calculando a segunda derivada, segue que

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \log \left( 1 - \lambda \frac{(s-1)}{\eta} \right) + \log(\sigma^{s-1}) + \log \left[ B \left( 1 + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right] \right\} \Big|_{s=1} \\ &= \left\{ -\frac{\lambda^2}{[\eta - \lambda(s-1)]^2} + \frac{1}{\eta^2} \left[ \psi^{(1)} \left( 1 + \frac{s-1}{\eta} \right) + \psi^{(1)} \left( 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right] \right\} \Big|_{s=1}.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Aplicando  $s = 1$  na segunda derivada, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= -\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 + \frac{2}{\eta^2} \psi^{(1)}(1) \\ &= \frac{1}{\eta^2} [2\psi^{(1)}(1) - \lambda^2].\end{aligned}\quad (2.26)$$

Por outro lado, note que, substituindo  $v = 2$  na Proposição (2.7.1) item 1, obtém-se o mesmo resultado da Equação (2.26).

Para a segunda etapa da demonstração, precisamos provar inicialmente que

$$\frac{d^v \varphi_X(s)}{ds^v} = -\frac{(v-1)! \lambda^v}{[\eta - \lambda(s-1)]^v} + \frac{1}{\eta^v} \left[ \psi^{(v-1)} \left( 1 + \frac{s-1}{\eta} \right) + (-1)^v \psi^{(v-1)} \left( 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right]. \quad (2.27)$$

De fato, para  $v = 2$  o resultado é válido (basta ver Equação 2.25). Agora, supondo que a Equação (2.27) seja verdadeira para  $v \in \mathbb{N}$ , com  $v > 1$ , e calculando a derivada em relação a  $s$ , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d^{v+1} \varphi_X(s)}{ds^{v+1}} &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{d^v \varphi_X(s)}{ds^v} \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[ -\frac{(v-1)! \lambda^v}{[\eta - \lambda(s-1)]^v} + \frac{1}{\eta^v} \left[ \psi^{(v-1)} \left( 1 + \frac{s-1}{\eta} \right) + (-1)^v \psi^{(v-1)} \left( 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right] \right] \\ &= -\frac{v! \lambda^{v+1}}{[\eta - \lambda(s-1)]^{v+1}} + \frac{1}{\eta^{v+1}} \left[ \psi^{(v)} \left( 1 + \frac{s-1}{\eta} \right) + (-1)^{v+1} \psi^{(v)} \left( 1 - \frac{s-1}{\eta} \right) \right]\end{aligned}$$

comprovando que a Equação (2.27) vale  $\forall v \in \mathbb{N}$ , com  $v > 1$ .

Por fim, para concluir a prova por indução, aplica-se  $s = 1$  na  $(v+1)$ -ésima derivada de  $\phi_X(s)$  para obter

$$\begin{aligned}\frac{d^{v+1} \varphi_X(s)}{ds^{v+1}} \Big|_{s=1} &= -\frac{v! \lambda^{v+1}}{[\eta]^{v+1}} + \frac{1}{\eta^{v+1}} \left[ \psi^{(v)}(1) + (-1)^{v+1} \psi^{(v)}(1) \right] \\ &= \frac{1}{\eta^v} \left[ \psi^{(v-1)}(1) + (-1)^v \psi^{(v-1)}(1) - (v-1)! \lambda^v \right] \\ &= \tilde{k}_{v+1}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

A demonstração do item 2 segue de maneira análoga (ver Apêndice B).  $\square$

## 2.8 Diagrama de Log-Cumulantes

O diagrama de Pearson, discutido em [Delignon, Garello e Hillion \(1997\)](#), tem por objetivo escolher o modelo que melhor descreve os dados, ou seja, são utilizados como ferramenta para seleção de modelos e avaliação de bondade de ajuste. Nicolas e Anfinen ([NICOLAS, 2005](#)) apresentaram um diagrama alternativo, semelhante ao de Pearson, chamado diagrama de log-cumulantes  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  que ao invés de utilizar índices de assimetria e curtose, propõe um diagrama baseado nas estatísticas  $\tilde{k}_3$  e  $\tilde{k}_2$  encontradas a partir da Equação (2.21).

Há casos na literatura que o diagrama de Pearson pode ser analiticamente intratável e não se aplica quando o suporte da distribuição é positivo. Por isso, utilizamos o diagrama de log-cumulantes  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  como ferramenta para avaliar qual modelo T-G se ajusta aos dados de análise de sobrevivência e processamento de imagens.

A Figura 2 exibe as regiões no diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  vinculadas aos modelos TW, TF, TLL, TP. Cada distribuição é representada por um subespaço, cujas dimensões dependem do número de parâmetros contidos nas expressões dos LCs. No entanto, a região resultante pode degenerar a uma curva. Isso acontece quando as expressões do LCs admitem apenas um parâmetro e, por isso, sua variedade é representada por uma linha (que pode ser vista como uma variedade de dimensão zero) ([ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011](#)). As distribuições TW, TF, TLL, TP resultam em variedades bidimensionais porque os log-cumulantes de ordem 2 e 3 são parametrizadas por dois parâmetros. Vale ressaltar que esses diagramas, considerando as distribuições-base Weibull e Fréchet aplicadas ao gerador beta-G, degeneraram em uma curva ([VASCONCELOS; CINTRA; NASCIMENTO, 2021](#)).

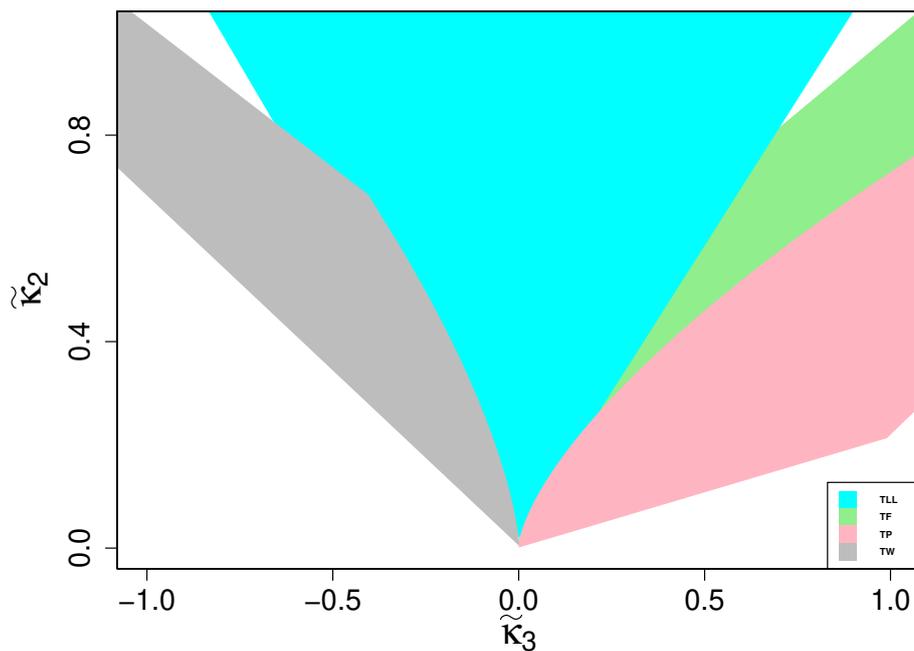


Figura 2 – Diagrama de Log-cumulantes.

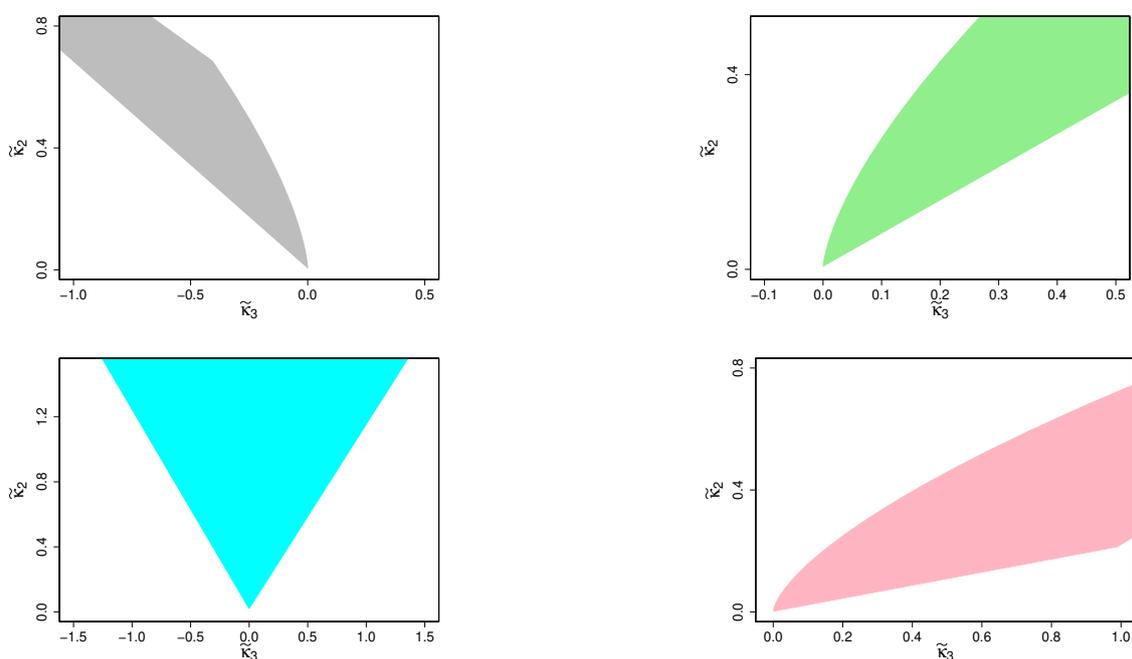


Figura 3 – Diagrama de Log-cumulantes separado por submodelos.

Na Figura 3 tem-se as regiões individuais no diagrama, verificando assim que os 4 modelos se sobrepõem em alguns casos.

## 2.9 Método de estimação por LCs

O método de log-cumulantes consiste em igualar os LCs teóricos aos seus respectivos LMs de acordo com a relação analítica encontrada na Equação (2.23). Além disso, os LMs são substituídos pelos seus LMs amostrais (2.24) que são quantidades que dependem da amostra. Desta forma, temos um sistema de equações onde podemos derivar a estimação por LCs para os parâmetros  $\sigma$ ,  $\lambda$  e  $\eta$ , os quais denotaremos por  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\eta}$ , respectivamente. Este método chamaremos de método de estimação por log-cumulantes (MLC).

Para a distribuição TW, tem-se

$$\hat{\sigma} = \exp \left\{ \hat{m}_1 - \frac{1}{\hat{\eta}} [\psi(1) - \hat{\lambda} \log(2)] \right\}$$

e

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{[\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1 - \hat{\lambda})\hat{\lambda}]}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  pode ser definido como a solução da equação não linear abaixo:

$$\hat{\lambda} = \frac{\psi^{(2)}(1) (\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2} - (\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^2) [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1 - \hat{\lambda})\hat{\lambda}]^{3/2}}{[1 - \hat{\lambda}][1 - 2\hat{\lambda}][\log(2)]^3 (\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2}}.$$

Para a distribuição TF, tem-se

$$\hat{\sigma} = \exp \left\{ \hat{m}_1 + \frac{1}{\hat{\eta}} [\psi(1) + \log(2)\hat{\lambda}] \right\}$$

e

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2\hat{\lambda}[1 + \hat{\lambda}]}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  pode ser definido como a solução da equação não linear abaixo:

$$\hat{\lambda} = \frac{\psi^{(2)}(1) (\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2} - (\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^2) (\psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2\hat{\lambda}[1 + \hat{\lambda}])^{3/2}}{[\log(2)]^3[1 + \hat{\lambda}][1 + 2\hat{\lambda}] (\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2}}.$$

Para a distribuição TLL, tem-se

$$\hat{\sigma} = \exp \left\{ \hat{m}_1 + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\eta}} \right\}$$

e

$$\hat{\eta} = \left( \frac{2\psi^{(1)}(1) - \hat{\lambda}^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \right)^{1/2}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  pode ser definido como a solução da equação não linear abaixo:

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3)^{1/3} \left( \frac{2\psi^{(1)}(1) - \hat{\lambda}^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \right)^{1/2}.$$

Por fim, para a distribuição TP, tem-se

$$\hat{\eta} = \exp \left\{ \hat{m} + \frac{\hat{\lambda} - 2}{2\hat{\sigma}} \right\}$$

e

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{5 - (1 + \hat{\lambda})^2}{4(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)}}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  pode ser definido como a solução da equação não linear abaixo:

$$\hat{\lambda} = \sqrt[3]{9 - 4(\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3) \left( \frac{5 - (1 + \hat{\lambda})^2}{4(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)} \right)^{3/2}} - 1.$$

## 2.10 Estatística de Hotelling - $T^2$ e Log-Cumulantes

A estatística  $T^2$  de Hotelling trata de uma generalização multivariada da estatística t de Student e surge como uma alternativa para avaliar as medidas de bondade de ajuste. Seja  $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)$  um vetor de variáveis aleatórias, em que  $\mathbf{x}$  é um vetor Normal  $\nu$ -dimensional  $\mathbf{x} \sim N_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$  é o vetor médio populacional e  $\boldsymbol{\Sigma} = E((\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T)$  é a matriz de covariância. A estatística de Hotelling [(ANDERSON, 1958), p. 170] é dada por

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.29)$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra,  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j$  é o vetor médio da amostra e  $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T$  é a matriz de covariância da amostra.

De acordo com (JOHNSON; WICHERN et al., 2002) as estatísticas  $T^2$  seguem uma distribuição  $\frac{(n-1)\nu}{(n-\nu)} F_{\nu, n-\nu}$ , em que  $F_{\nu, n-\nu}$  é a distribuição F-Snedecor com  $\nu$  e  $n-\nu$  graus de liberdade, e se aproxima da sua distribuição limite, qui-quadrado  $\chi^2_{(n)}$ , para grandes amostras. (ANFINSEN; ELTOFT, 2011).

Na seção anterior, foi realizado um estudo qualitativo a partir do diagrama de LCs. Nesta seção, propomos uma medida de bondade de ajuste quantitativa, objetivando a inserção dos LCs na estatística  $T^2$  de Hotelling, que nos mostrará numericamente qual distribuição consegue modelar os dados em estudo através de um teste de hipótese.

Assim, para um nível de significância  $\alpha$  e sob a hipótese  $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$

$$\begin{aligned} \alpha &= P \left[ T^2 > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\alpha) \right] \\ &= P \left[ n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{S}^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

em que  $F_{\nu, n-\nu}(\alpha)$  denota o percentil superior da distribuição  $F_{\nu, n-\nu}$ . Esta afirmação (2.30) leva imediatamente à rejeição de  $H_0$  se

$$T^2 = n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{S}^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\alpha). \quad (2.31)$$

Analogamente, o teste da razão de verossimilhança rejeita  $H_0$  com um nível de significância  $\alpha$ , se  $T^2 \geq \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\alpha)$  (ANDERSON, 1958).

A proposta de incorporar os LCs à estatística  $T^2$  visa categorizar o ajuste do modelo ao conjunto de dados com base na localização do diagrama estimado  $\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}^T$ . Para isso, exigimos uma estatística de teste para a hipótese nula  $H_0 : E\left(\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$  em que esse teste “abre caminhos” para aceitar ou não a adequação dos LCs estimados para regiões específicas do diagrama. Por existir uma relação entre os parâmetros da distribuição e os LCs (quantidades analiticamente bem definidas, ver Tabela 4), é possível encontrar estimadores para os LCs. Desta forma, consideraremos as seguintes quantidades:

$$\tilde{\boldsymbol{m}} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_p)^T \text{ e } \hat{\boldsymbol{m}} = (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_p)^T.$$

Pelo teorema do limite central de Cramér-Wold (BILODEAU; BRENNER, 1999), temos

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{m}} - \tilde{\boldsymbol{m}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_\nu(0, \boldsymbol{M}_\nu),$$

em que a amostra segue a distribuição normal multivariada com média  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ , denotado por  $x \sim \mathcal{N}_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , e  $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D}$  denota convergência em distribuição. Além disso, temos que  $\boldsymbol{M}_\nu$  é definido por

$$Cov(\hat{m}_r, \hat{m}_j) = n\mathbb{E} \{ (\hat{\boldsymbol{m}} - \tilde{\boldsymbol{m}})(\hat{\boldsymbol{m}} - \tilde{\boldsymbol{m}})^T \} = \left\{ \tilde{m}_{r+j} - \tilde{m}_r \tilde{m}_j \right\} \Big|_{r,j=1}^\nu. \quad (2.32)$$

Ainda, considerando as funções compostas que transformam os momentos para log-cumulantes, temos:

$$\tilde{k}_\nu = g_\nu(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_\nu) \text{ e } \hat{k}_\nu = g_\nu(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_\nu).$$

Assim, pelo teorema do limite central de Cramér-Wold, temos

$$\sqrt{n}(\hat{k} - \tilde{k}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_\nu(0, \mathbf{K}_\nu),$$

em que,

$$\mathbf{K}_\nu = \mathbf{J}_\nu^T \cdot \mathbf{M}_\nu \cdot \mathbf{J}_\nu, \quad (2.33)$$

$$\nabla g_\nu = \left[ \frac{dg_\nu(\tilde{m})}{d\tilde{m}_1}, \dots, \frac{dg_\nu(\tilde{m})}{d\tilde{m}_\nu} \right]$$

e

$$\mathbf{J}_\nu = [\nabla g_1 | \dots | \nabla g_\nu].$$

Além disso, de acordo com o método delta generalizado (BILODEAU; BRENNER, 1999), se considerarmos grandes amostras, o vetor estimado  $\left[ \hat{k}_2 \quad \hat{k}_3 \right]^T$  segue uma distribuição normal bivariada com média  $\left[ \tilde{k}_2 \quad \tilde{k}_3 \right]^T$  e uma matriz de covariância assintótica  $\mathbf{K}_2$ , ou seja

$$\left( \left[ \begin{array}{c} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{array} \right] \right) \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_2(0, \mathbf{K}_2), \quad (2.34)$$

em que  $\stackrel{a}{\sim}$  indica uma distribuição assintótica.

Neste caso, comparando o resultado obtido na equação (2.34) com a estatística de hotelling  $T^2$  expressa em (2.29), temos  $\boldsymbol{\mu} = \left[ \tilde{k}_2 \quad \tilde{k}_3 \right]^T$  e  $\bar{\mathbf{x}} = \left[ \hat{k}_2 \quad \hat{k}_3 \right]^T$ . A matriz  $S$  em (2.29) será substituída pela matriz de covariância assintótica estimada  $\hat{\mathbf{K}}_2$ . Portanto, para um nível de significância específico  $\alpha$ , temos a seguinte estatística de teste:

$$T^2 = n \left( \left[ \begin{array}{c} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{array} \right] \right)^T \hat{\mathbf{K}}_2^{-1} \left( \left[ \begin{array}{c} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{array} \right] \right), \quad (2.35)$$

em que  $\hat{\mathbf{K}}_2^{-1}$  é assumida uma matriz não-singular, caso contrário, utiliza-se a inversa generalizada de Moore-Pearson (SEBER, 2008).

Já mencionamos que para grandes amostras a distribuição associada a variável aleatória de  $T^2$  segue a distribuição  $\chi_v^2$ . Assim, é possível empregar em (2.35) a aproximação  $F_{v,n-v}(\cdot) \approx \chi_v^2(\cdot)$ , em que  $\chi_v^2(\cdot)$  representa o percentil superior da distribuição  $\chi_v^2$ . Além disso, podemos obter as elipses de confiança com o nível de significância  $\zeta$ , dadas por:

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T \hat{\mathbf{K}}_2^{-1} \left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right) \leq \frac{2(n-1)}{n(n-2)} \chi_2^2(\gamma), \quad (2.36)$$

em que  $\chi_2^2(\gamma)$  é o percentil superior para  $\chi_2^2$ . A elipse em (2.36) está centrada em  $(\tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$  e eixos orientados de acordo com os autovetores da matriz  $\hat{\mathbf{K}}_2$ .

Baseada na estatística  $T^2$  dada por (2.35), temos as medidas de bondade de ajuste para as distribuições TW, TF, TLL e TP através das proposições (2.10.1), cuja demonstração encontra-se no Apêndice A.

**Proposição 2.10.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória que segue a distribuição T-G com parâmetros  $\xi$  e  $\lambda$  com  $|\lambda| \leq 1$  então a estatística  $T^2$  de Hotelling, baseada nos LCs, é dada por:

$$T_{T-G}^2 = \frac{nM^6}{\hat{\delta}_{22}\hat{\delta}_{23} - \hat{\delta}_{23}^2} \left[ \hat{\delta}_{33} \left( \hat{k}_2 - \tilde{k}_2 \right)^2 + \hat{\delta}_{22} \left( \hat{k}_3 - \tilde{k}_3 \right)^2 - 2\hat{\delta}_{23} \left( \hat{k}_2 - \tilde{k}_2 \right) \left( \hat{k}_3 - \tilde{k}_3 \right) \right],$$

em que  $\hat{k}_2, \hat{k}_3$  são os estimadores dos LCs  $\tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ , respectivamente;  $\hat{\delta}_{22}, \hat{\delta}_{23}, \hat{\delta}_{33}$  são os estimadores para  $\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{33}$  (ver no Apêndice A) e com  $M$  igual ao parâmetro:

- (i)  $\eta$ , se a distribuição-base for Weibull, Fréchet ou Log-Logística;
- (ii)  $2\eta$ , se a distribuição-base for a Pareto.

O Algoritmo 1 descreve como a Estatística  $T^2$  de Hotelling pode ser calculada na prática.

---

**Algoritmo 1:** Estatística  $T^2$  de Hotelling

---

- Passo 1.** Estimar o vetor de parâmetros  $\Theta = [\eta, \sigma, \lambda]^T$  pelo MLC.
  - Passo 2.** Calcular os cinco primeiros LCs.
  - Passo 3.** Calcular  $\mathbf{K}_2^{-1}$ .
  - Passo 4.** Calcular as Estatísticas de Hotelling.
- 

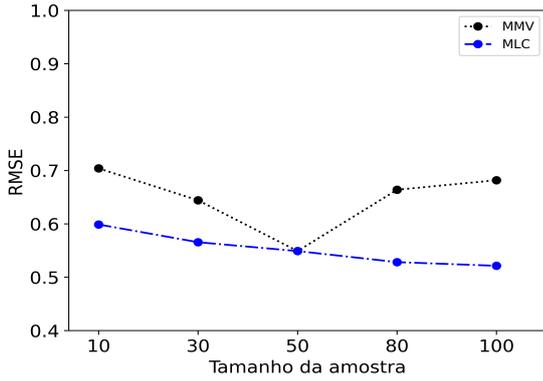
## 2.11 Estudo de Simulação

Nesta seção, discutiremos os resultados do estudo de Simulação de Monte Carlo realizada para verificar o desempenho do método de estimação por Log-Cumulantes (MLC) e comparar com o método de Máxima verossimilhança (MLE), bastante utilizado na literatura. Na próxima seção mostraremos experimentos utilizando bancos de dados reais para analisar o efeito do uso das estimativas para as novas medidas de bondade de ajuste.

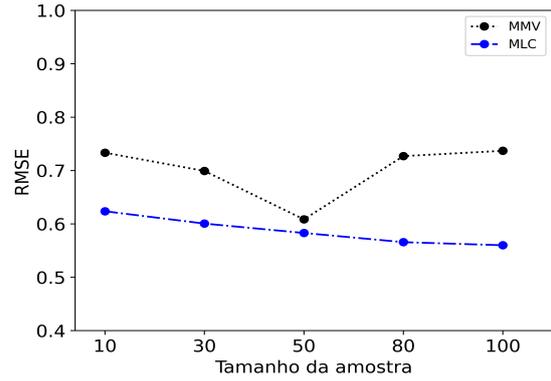
Para avaliar o desempenho dos estimadores a partir dos métodos MMV e MLC, foi realizada uma Simulação de Monte Carlo baseado em [Vasconcelos et al. \(2020\)](#). Nesta seção, apresentamos apenas o estudo para o submodelo TW, o qual consideramos os tamanhos amostrais  $n = 10, 30, 50, 80$  e  $100$ . Além disso, consideramos  $\eta \in \{1.5, 1.7, 2.0, 2.1\}$ ,  $\sigma \in \{0.8, 0.9, 1.0\}$  e  $\lambda \in \{-0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.9\}$ . Para cada combinação  $(\eta, \sigma, \lambda, n)$  geramos 10.000 replicações da simulação em que os estimadores foram avaliados para vários tamanhos de amostra.

A simulação foi realizada através do *software* estatístico R, a qual utilizou-se o pacote "MaxLik" e a função "maxLik". Já para o MLC utilizou-se o pacote *BB* e a função *BBsolve*. Para comparação dos métodos, utilizamos raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE) ([VASCONCELOS et al., 2020](#)).

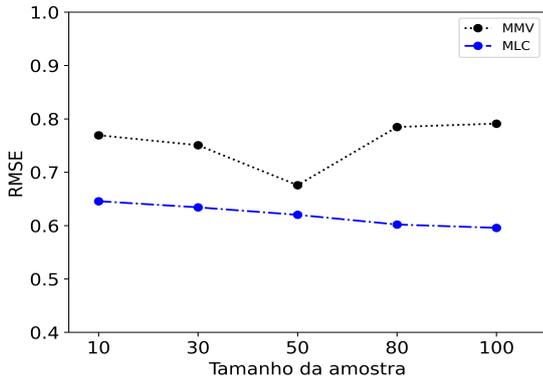
É possível observar na Figura 4 que o método MLC obteve, em todos os cenários, melhor desempenho comparado ao método MMV. Na medida que o tamanho da amostra aumenta, o viés e a variância, no método MLC, diminuem.



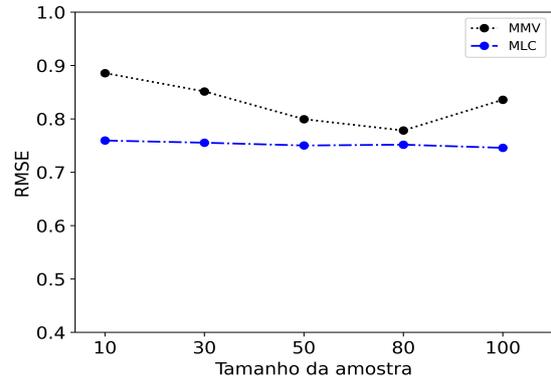
((a))  $\eta = 1.5, \sigma = 1.0, \lambda = -0.4.$



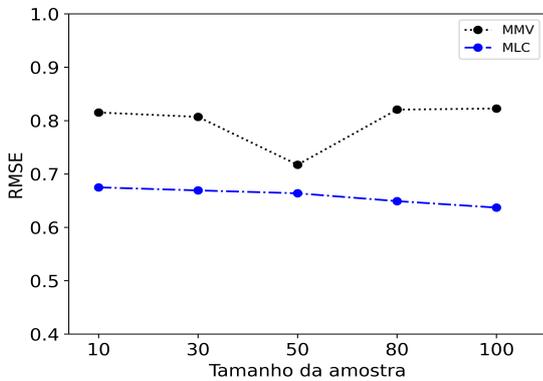
((b))  $\eta = 1.5, \sigma = 1.0, \lambda = -0.5.$



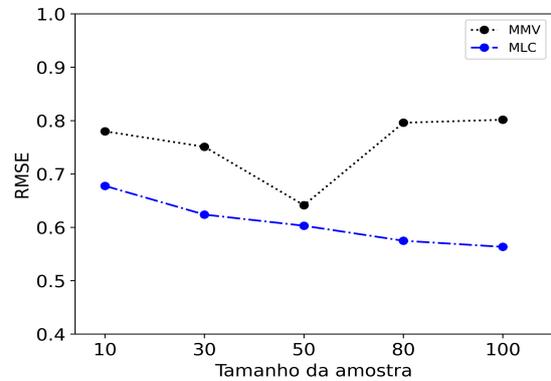
((c))  $\eta = 1.5, \sigma = 1.0, \lambda = -0.6.$



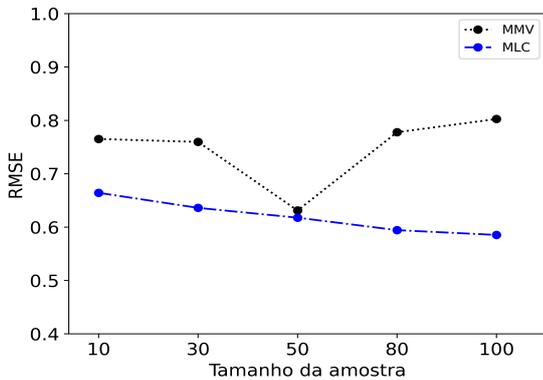
((d))  $\eta = 1.5, \sigma = 1.0, \lambda = -0.9.$



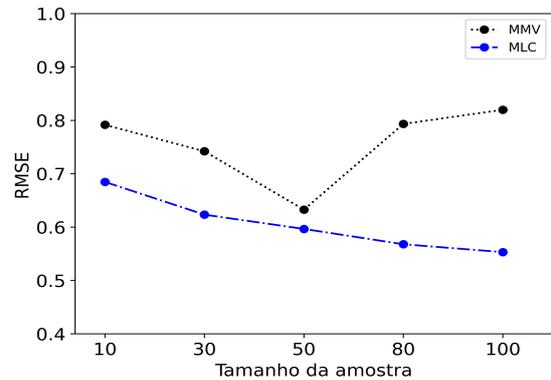
((e))  $\eta = 1.5, \sigma = 1.0, \lambda = -0.7.$



((f))  $\eta = 2.0, \sigma = 1.0, \lambda = -0.6.$



((g))  $\eta = 1.7, \sigma = 1.0, \lambda = -0.6.$



((h))  $\eta = 2.1, \sigma = 1.0, \lambda = -0.6.$

Figura 4 – RMSE para alguns parâmetros do modelo TW

## 2.12 Aplicação a dados reais

### 2.12.1 Base de dados e estatística descritiva

Utilizamos cinco bases de dados para determinar qual modelo de probabilidade é o mais adequado para estes conjuntos, de acordo com o critério de bondade de ajuste desenvolvido. Dentre eles, um conjunto de dados foi obtidos através do sensor *Airborne Synthetic Aperture Radar (AIRSAR)*, que constitui um sistema aerotransportado de obtenção de imagens SAR (*Synthetic Aperture Radar*); uma ferramenta de imagem para qualquer clima capaz de penetrar nas nuvens e coletar dados à noite. Os comprimentos de onda mais longos também podem penetrar no dossel da floresta e, em áreas extremamente secas, através da fina cobertura de areia e neve seca. Até onde sabemos, não há registro na literatura no tocante a aplicação de modelos da classe T-G a dados de imagens SAR. Segue a descrição dos conjuntos de dados selecionados:

- (i) Fadiga (FA): O estudo consiste em uma amostra de fio de polyster de 100 cm com nível de deformação de 2,3% para analisar os testes das características de fadiga de tração (QUESENBERRY; KENT, 1982; ARYAL; TSOKOS, 2011).
- (ii) Covid-19 (CV): Dados divulgados pelo Ministério da Saúde de Israel, em novembro de 2020, sobre pacientes com COVID-19. O conjunto de dados consiste no tempo (em dias) desde o primeiro teste positivo (PCR) até o primeiro teste negativo em homens com mais de 60 anos. (TANIŞ, 2022).
- (iii) Receita Fiscal (RF): Os dados incluem a receita fiscal real mensal (em milhões de libras egípcias) no Egito de janeiro de 2006 a novembro de 2010. (ALMARASHI et al., 2020).
- (iv) Urbano (UR): Dados extraídos da Região Urbana da cidade de São Francisco, Estados Unidos, capturados pelo sensor AIRSAR (NASCIMENTO, 2012).
- (v) Fibras de Carbono (FC): O estudo consiste em 100 observações sobre o estresse de ruptura de fibras de carbono (em Gba) (MAHMOUD; MANDOUH, 2013).

A estatística descritiva dos cinco bancos de dados está resumida na Tabela 5<sup>1</sup>. Note que todos os conjuntos de dados possuem assimetria (Ass) positiva, pois a média é maior que a mediana. Além disso, o conjunto de dados FA é bimodal, apresentando a maior dispersão, enquanto que RF e FC são unimodais. Os dados UR e FC apresentam os dois desvios-padrão (DP) mais baixos, porém possuem uma medida de curtose (Curt) alta. Por fim, temos que todos os conjuntos de dados são heterogêneos, uma vez que, apresentam os valores do coeficiente de variação (CV) acima de 30, indicando que estão dispersos em torno da média.

---

<sup>1</sup>  $n$  indica tamanho da amostra

Tabela 5 – Estatística Descritiva dos Dados

Dados	Min.	Média	Mediana	Moda	DP	Ass.	Curt.	Máx.	CV (%)	$n$
FA	15.0	221.5	195.5	180/264	144.51	1.35	2.78	829.0	65.24	100
CV	5.00	18.38	16.00	10/12/16	10.724	1.85	4.32	63	58.35	50
RF	4.10	13.49	10.60	8.5	8.05	1.57	2.08	39.20	59.69	59
UR	0.0133	0.1115	0.0790	--	0.1090	3.0756	11.7955	0.7612	97.73	140
FC	0.920	1.656	1.544	1.501	0.5968	3.1531	14.2428	5.306	36.04	100

A Figura 5 exibe o diagrama de LCs ( $\tilde{k}_3, \tilde{k}_2$ ) como medida de bondade de ajuste qualitativa. Para cada conjunto de dados, calculamos os LCs amostrais de acordo com uma amostragem bootstrap com 1.000 réplicas e tamanhos de amostra de 90%.

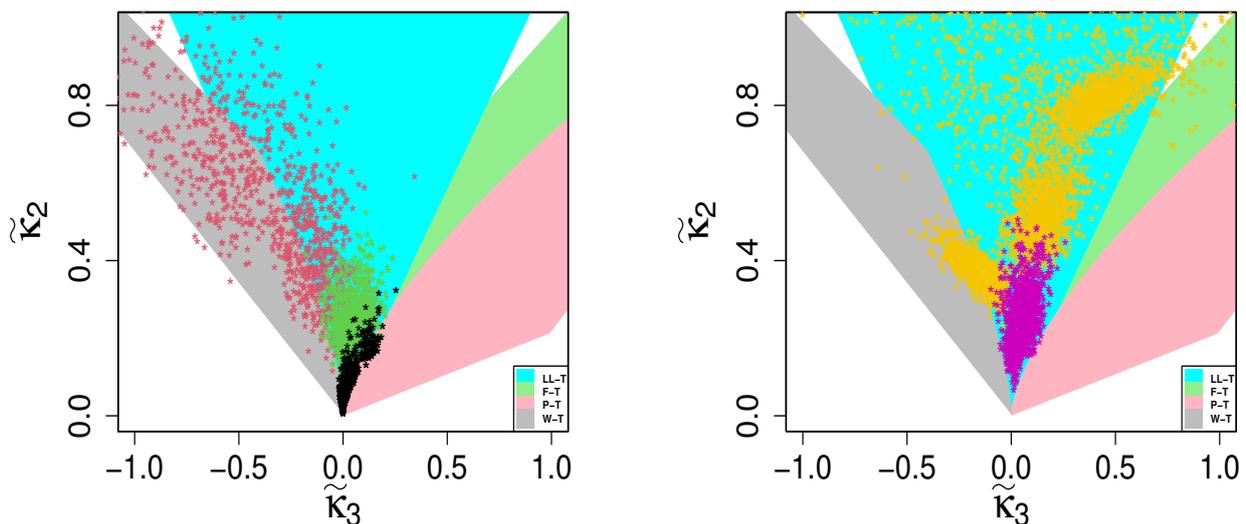


Figura 5 – Diagrama mostrando os LCs teóricos para os modelos TW, TF, TLL e TP, bem como uma coleção de LCs representando os dados FA (\*), CV (\*), RF (\*), UR (\*), FC (\*).

É possível observar na Figura 5 que os bancos de dados CV, RF e UR se concentram na região central do diagrama, indicando o submodelo TLL como o mais propício para esses bancos de dados. Já o conjunto FA possui os dados divididos nas áreas dos submodelos TLL e TW. Por fim, o conjunto FC está concentrado na região central inferior, sobrepondo seus dados em três submodelos: TLL, TF e TP.

A Tabela 6 apresenta para cada modelo a estatística  $T^2$  de Hotelling com seu respectivo p-valor. Tais estatísticas obtidas podem ser interpretadas como uma medida de distância entre os

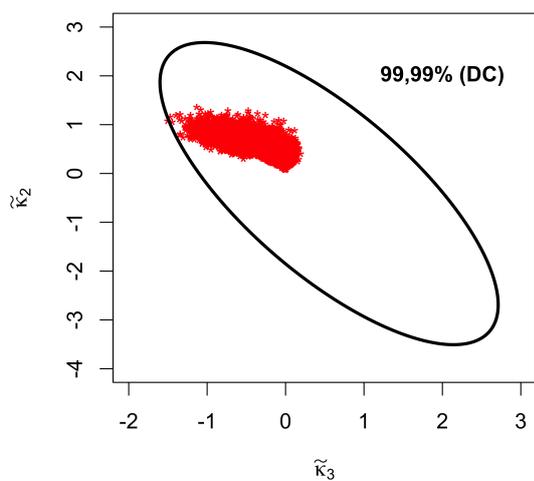
dados e cada modelo da classe T-G. Valores mais baixos para a estatística  $T^2$  de Hotelling indicam um melhor ajuste aos dados.

Tabela 6 – Estatística  $T^2$  de Hotelling e p-valor

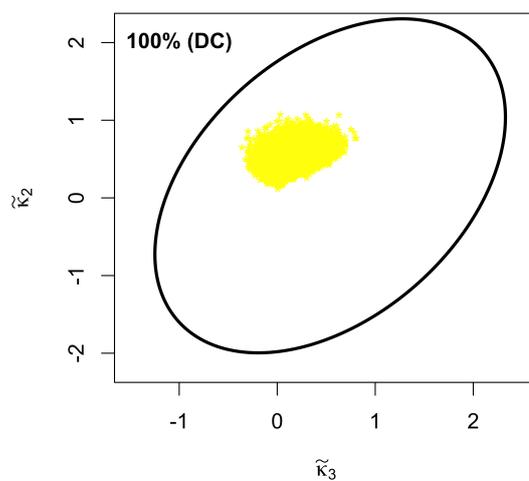
Modelos	FA	CV	RF	UR	FC
TW	0.3842 (0.9448)	0.147 (0.9863)	0.0366 (0.9982)	> 10 ( $\approx$ 0.00)	8.1517 (0.0522)
TF	> 10 ( $\approx$ 0.00)	0.0437 (0.9977)	0.0182 (0.9994)	> 10 ( $\approx$ 0.00)	<b>0.0075 (0.9998)</b>
TLL	<b>0.2361 (0.9722)</b>	<b>0.0023 (0.9999)</b>	<b>0.0032 (0.9999)</b>	<b>0.0711 (0.9951)</b>	0.0331 (0.9984)
TP	> 10 ( $\approx$ 0.00)	0.0067 (0.9999)	0.2932 (0.9628)	> 10 ( $\approx$ 0.00)	0.2152 (0.9757)

De acordo com os valores da estatística  $T^2$  de Hotelling na Tabela 6, temos que a distribuição TLL é um bom modelo para os conjuntos de dados FA, CV, RF e UR. Entretanto, o modelo TF obteve um melhor resultado para o banco de dados FC. Esses dados quantitativos confirmam a análise qualitativa fornecida na Figura 5. É possível observar que os bancos de dados que não possuem pontos (ou possui poucos pontos) sobre a região do modelo no diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  admitem valores da estatística  $T^2$  maiores que dez, ou seja, o modelo não é indicado para este conjunto de dados.

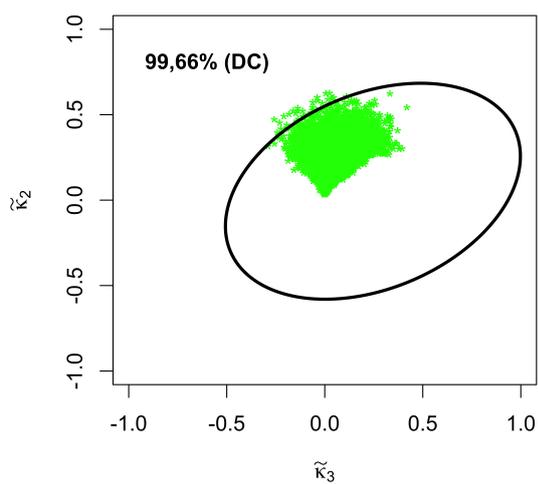
Para complementar a análise anterior, traçamos as elipses de confiança para cada conjunto de dados. A construção das elipses foi baseada em 2.35. Empregamos o menor valor da estatística  $T^2$  de Hotelling, ver Tabela 6, a distribuição T-G associada usando os LCs estimados  $\hat{k}_2$  e  $\hat{k}_3$  e a matriz de covariância da amostra  $\hat{\Sigma}$ .



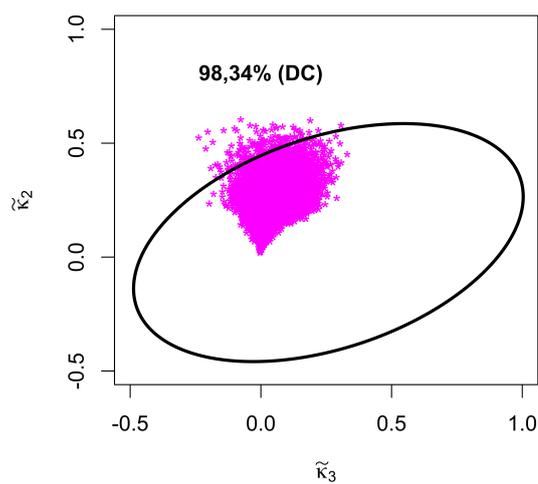
((a)) Elipse de confiança TLL - Dados FA



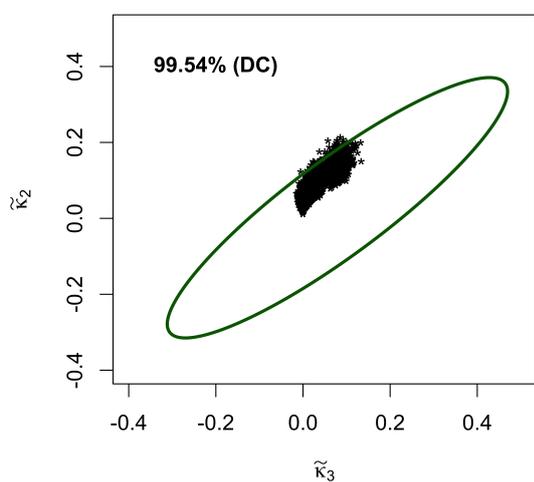
((b)) Elipse de confiança TLL - Dados UR



((c)) Elipse de confiança TLL - Dados CV



((d)) Elipse de confiança TLL - Dados RF



((e)) Elipse de confiança TF - Dados FC

Figura 6 – Elipses de confianças.

## 2.13 Conclusão

No capítulo 2, apresentamos um teorema o qual é possível obter a Transformada de Mellin de qualquer modelo da classe Transmutada-G a partir dos momentos ponderados de probabilidade da distribuição-base. Mostramos que as estatísticas do tipo Mellin podem ser aplicadas com sucesso como medidas de bondade de ajuste para os modelos Transmutada Weibull, Transmutada Fréchet, Transmutada log-logística e Transmutada Pareto no contexto da análise de sobrevivência e processamento de imagens. Para tal feito, obtemos expressões (forma fechada) para a função característica do segundo tipo. Posteriormente, os Log-cumulantes relacionados a essas expressões foram utilizados como entradas para a estatísticas  $T^2$  de Hotelling e, por fim, para complementar o estudo, foram construídas as elipses de confiança. E para ilustrar a proposta desse trabalho, cinco bancos de dados reais foram utilizados para mostrar que o método de log-cumulantes desempenha um bom comportamento para a medida de bondade de ajuste.

## 3 Medidas de Informação e bondade de ajustes para Nova Classe Transmutada-G

### 3.1 Introdução

Modelos de distribuição de probabilidade que são frequentemente utilizados para modelar dados em diversas áreas (engenharias, ciências médicas, economia, demografia, etc.), muitas vezes, não se ajustam de forma satisfatória a um conjunto de dados reais, motivando-se a necessidade de estender as formas dessas distribuições. Recentemente, muitas famílias de distribuições generalizadas foram propostas na literatura a fim de fornecer maior flexibilidade na modelagem de dados provenientes de diversas aplicações, ver por exemplo, o trabalho de [Tahir e Nadarajah \(2015\)](#) o qual apresenta uma revisão abrangente para estas classes de modelos. Os primeiros geradores de grande relevância foram Marshall-Olkin-G ([MARSHALL; OLKIN, 1997](#)), beta-G ([EUGENE; LEE; FAMOYE, 2002b](#)), gama-G ([ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009](#)) e kumaraswamy-G ([CORDEIRO; CASTRO, 2011b](#)). A utilização de modelos de distribuição com mais parâmetros para os ajustes a bancos de dados está sendo possível devido ao avanço de ferramentas computacionais mais poderosas ([SILVEIRA et al., 2023](#)).

Uma forma conveniente de construção de novas distribuições é utilizando mapas de transmutação. [Shaw e Buckley \(2009\)](#) foram os pioneiros nesse estudo utilizando uma técnica chamada Mapa de Transmutação Quadrático (MTQ) para gerar a família de distribuição flexível. Dentre elas, foi proposta a família Transmutada-G em que sua cdf é definir por:

$$F(x) = F(x, \boldsymbol{\xi}, \lambda) = (1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^2, \quad |\lambda| \leq 1. \quad (3.1)$$

Uma revisão abrangente das distribuições transmutadas é fornecida em [Dey et al. \(2021\)](#). Estes autores defendem tal revisão como uma referência importante para encorajar o desenvolvimento de outras distribuições transmutadas que poderiam modelar fenômenos complicados com mais precisão. [Ahmad \(2020\)](#) introduziu uma nova família generalizada de distribuições, que é uma ampliação da família de distribuições exponenciadas e transmutadas.

Por outro lado, embora as medidas de bondade de ajuste sejam métricas quantitativas cruciais para avaliar o quão bem um modelo se ajusta aos dados na modelagem estatística, elas têm mostrado um crescimento mais contido em comparação com o desenvolvimento de novos modelos de distribuição. Alguns trabalhos que propuseram medidas de bondade de ajuste para modelos de probabilidade foram Pearson ([PEARSON, 1895](#)); McQuarrie e Tsai ([MCQUARRIE; TSAI, 1998](#)) e Pakyari e Balakrishnan

(PAKYARI; BALAKRISHNAN, 2012).

Pearson (1895) introduziu um critério de seleção de modelos com base em medidas de assimetria e curtose, posteriormente aplicado por Vogel e Fennessey (1993) em dados hidrológicos. Além disso, esses diagramas têm sido amplamente empregados na seleção de modelos para séries temporais em mercados de *commodities*, conforme observado por Andreev, Kanto e Malo (2007). No entanto, Nicolas (2005) mostrou que o método de Pearson apresenta uma solução analítica difícil e não se adequa a variáveis aleatórias positivas. Pakyari e Balakrishnan (2012) propuseram uma medida de adequação do ajuste que considera a distância entre a função de distribuição acumulada (fda) e a função de distribuição empírica. No entanto, é importante notar que essa medida pode apresentar limitações, já que nem sempre é possível obter uma solução analítica.

Nicolas e Anfinsen (2002) apresentaram um diagrama alternativo, semelhante aquele de Pearson, chamado diagrama de Log-Cumulantes (LC)  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  que ao invés de utilizar índices de assimetria e curtose, propõe um diagrama baseado nas estatísticas  $\tilde{k}_3$  e  $\tilde{k}_2$ . Há casos na literatura que o diagrama de Pearson pode ser analiticamente intratável e não se aplica quando o suporte da distribuição for positivo. A ideia desses autores foi propor a aplicação da transformada de Mellin (TM) como uma alternativa à função característica usual, definindo assim a função característica de tipo II e conseqüentemente os log-momentos e log-cumulantes de tipo II.

Log-cumulantes (de segundo tipo) de segunda e terceira ordem são amplamente utilizados no contexto de dados POLSAR (*Polarimetric Synthetic Aperture Radar*). Porém, na modelagem de tais dados, esses log-cumulantes produzem os mesmos valores quando aplicados a modelos produto e modelos de mistura finita. Deng e López-Martínez (2016) apresentaram diagramas de LCs 3D chamados de cubo Log-cumulantes que levam em conta LCs de quarta ordem auxiliando na distinção de tais modelos.

Na teoria da informação, existem diferentes critérios para medir a incerteza de um modelo probabilístico. Além disso, várias medidas de divergência foram desenvolvidas na literatura para medir a similaridade (proximidade) entre duas distribuições de probabilidade. A entropia de Shannon (SHANNON, 1948), a informação de Fisher (FISHER, 1929) e a diferença média de Gini (GINI, 1912) são três medidas de informação importantes que têm sido utilizadas nas mais diversas áreas. Mais recentemente, estas medidas de informação foram generalizadas com base na desigualdade de Jensen, que passaram a ser conhecidas como medidas de informação de Jensen-Shannon, Jensen-Fisher e Jensen-Gini, respectivamente. Para mais detalhes pertinentes, ver Mehrli, Asadi e Kharazmi (2018) e Sánchez-Moreno, Zarzo e Dehesa (2012).

Recentemente, Kharazmi e Balakrishnan (2021) exploraram a classe T-G, enquanto Saha, Kayal e Balakrishnan (2022) investigaram a classe de distribuições cúbica transmutada generalizada em termos de medidas informacionais. Ambos os estudos avançaram no entendimento dessas classes ao analisarem entropia de Shannon, informação de Fisher e diferença média de Gini; medidas de

divergência de Kulback-Leibler e qui-quadrado também foram consideradas.

A nova transmutada-G (NT-G) é uma versão generalizada da classe T-G, introduzida por [Ahmad \(2020\)](#), e será utilizada neste capítulo. Alguns submodelos desta versão generalizada são muito flexíveis, capazes de modelar taxas de risco unimodais, crescente, decrescente e constante ([AHMAD, 2020](#)). Foram exploradas diversas propriedades de teoria de informação: Entropia de Shannon, diferença média de Gini, informação de Fisher. Além disso, também estudamos a divergência Kulback-Leibler e a distância Qui-Quadrado entre a distribuição do gerador e seus componentes. A combinação de MPP e transformada de Mellin é proposta para fornecer novas medidas de bondade de ajuste para seleção de modelos da família NT-G. Com o intuito de ter mais informação qualitativa, serão construídos diagramas de Log-cumulantes 2D e 3D para dois submodelos do gerador: Nova transmutada Weibull (NTW) ([AHMAD, 2020](#)), Nova transmutada Fréchet (NTF) ([MAHMOUD; MANDOUH, 2013](#)). Além disso, é proposta uma relação entre a estatística  $T^2$  de Hotelling e o método delta para obter as elipses de confiança para testes de hipóteses, nos quais os cumulantes do segundo tipo estão envolvidos. Por fim, quatro bases de dados reais no contexto da análise de sobrevivência são submetidas à metodologia proposta.

### 3.1.1 Funções Distribuição e Densidade

Uma versão generalizada da classe T-G, introduzida por [Ahmad \(2020\)](#) tem a seguinte definição: *Uma variável aleatória  $X$  segue a versão generalizada da Classe T-G, denotada por NT-G( $\alpha, \lambda, \xi$ ) se sua fda e pdf são definidas, respectivamente, por*

$$F(x) = F(x, \alpha, \lambda, \xi) = (1 + \lambda)G(x; \xi) - \lambda G(x; \xi)^\alpha, \quad \alpha, \xi > 0, |\lambda| \leq 1, x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

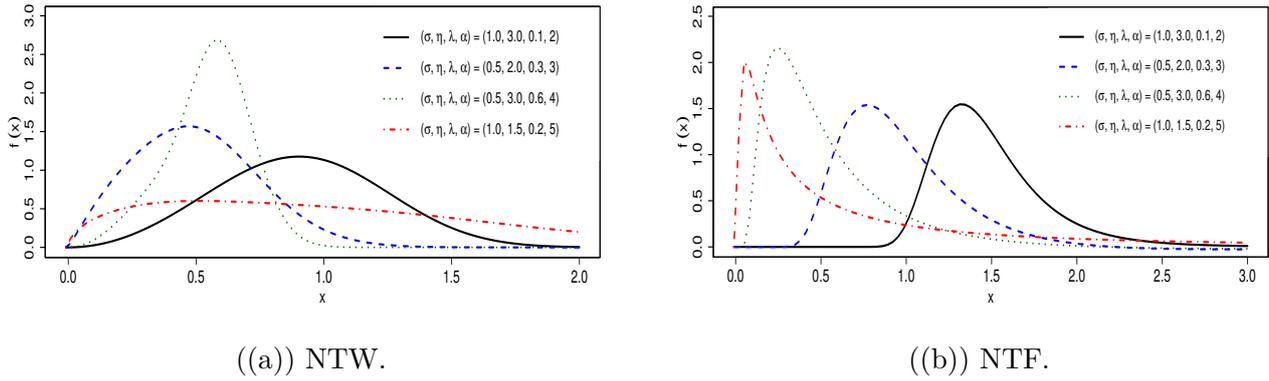
em que  $G(x; \xi)$  é fda da distribuição-base, e

$$f(x) = f(x, \alpha, \lambda, \xi) = [1 + \lambda - \alpha \lambda G(x; \xi)^{\alpha-1}] g(x; \xi), \quad x \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

em que  $g(x; \xi)$  é fdp da distribuição-base.

Ambas funções dependem do vetor paramétrico adicional  $\xi$ . Para  $\alpha = 2$ , tem-se a classe T-G. Para  $\alpha = 1$  e  $\lambda = -1$  (ou  $\lambda = 0$  e  $\alpha > 0$ ), a classe NT-G reduz-se a distribuição-base G.

A extensão da transmutada Weibull (NTW) e a extensão da transmutada Fréchet (NTF) são modelos particulares provenientes da classe NT-G e serão exploradas neste capítulo. A fdp de cada modelo associada a (3.3) está apresentada na Tabela 7 e os gráficos na Figura 7.



(a) NTW.

(b) NTF.

Figura 7 – Gráfico da fdp dos modelos NTW e NTF para diferentes valores dos parâmetros.

Tabela 7 – A fdp dos modelos da classe NT-G

Modelo	$f(x)$	Parâmetros $\times$ Suporte
NTW	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right\} \left[1 - \lambda + \lambda \alpha \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta(\alpha-1)}\right\}\right]$	$\alpha > 0,  \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma > 0, x \geq 0$
NTF	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-(\eta+1)} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\eta}\right\} \left[1 + \lambda - \lambda \alpha \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\eta(\alpha-1)}\right\}\right]$	$\alpha > 0,  \lambda  \leq 1, \eta > 0, \sigma > 0, x > 0$

Note que se  $X \sim \text{NTW}(\alpha, \lambda, \boldsymbol{\xi})$ , então a distribuição de  $X$  reduz para Transmutada Weibull, se  $\alpha = 2$ ; Transmutada Rayleigh, se  $\alpha = 2$  e  $\eta = 2$ ; Transmutada Exponencial, se  $\alpha = 2$  e  $\eta = 1$ ; Weibull, se  $\alpha = 1$  e  $\lambda = -1$ ; Rayleigh, se  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = -1$  e  $\eta = 2$ ; Exponencial, se  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = -1$  e  $\eta = 1$ .

A função de sobrevivência (sf), função de risco (hf), função de risco reversa (rhf) e função de risco acumulada (chf) de NT-G são, respectivamente, dada por

$$S(x; \alpha, \lambda; \boldsymbol{\xi}) = 1 - [(1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^\alpha], \quad (3.4)$$

$$h(x; \alpha, \lambda; \boldsymbol{\xi}) = \frac{g(x; \boldsymbol{\xi}) (1 + \lambda - \alpha \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-1})}{1 - [(1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^\alpha]}, \quad (3.5)$$

$$r(x; \alpha, \lambda; \boldsymbol{\xi}) = \frac{g(x; \boldsymbol{\xi}) (1 + \lambda - \alpha \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-1})}{(1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^\alpha}, \quad (3.6)$$

$$H(x; \alpha, \lambda, \boldsymbol{\xi}) = -\log(1 - [(1 + \lambda)G(x; \boldsymbol{\xi}) - \lambda G(x; \boldsymbol{\xi})^\alpha]). \quad (3.7)$$

Note que, a função de risco de NT-G pode ser expresso por

$$\begin{aligned} h(x; \alpha, \lambda; \boldsymbol{\xi}) &= \frac{f(x; \boldsymbol{\xi}) (1 + \lambda - \alpha \lambda F(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-1})}{(1 - F(x; \boldsymbol{\xi})) \left(1 - \lambda \sum_{i=1}^{\alpha-1} F(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-i}\right)} \\ &= h_G(x) \underbrace{\left( \frac{1 + \lambda - \alpha \lambda F(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-1}}{1 - \lambda \sum_{i=1}^{\alpha-1} F(x; \boldsymbol{\xi})^{\alpha-i}} \right)}_I, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que  $h_G(x)$  é a hf da distribuição-base. A quantidade multiplicadora  $I$  é um fator de correção para  $h_G(x)$ .

### 3.1.2 Propriedades Informacionais

Algumas definições são apresentadas a seguir para a construção de algumas propriedades do gerador. Para uma distribuição-base arbitrária  $G(x, \xi)$ , diz que uma variável aleatória tem distribuição Exp-G com parâmetro de forma  $\delta > 0$ , denotado por  $Y_\delta \sim \text{Exp} - G(x, \delta)$ , se suas funções pdf e cdf são, respectivamente, dadas por

$$f_{exp}(x; \xi, \delta) = \delta G(x; \xi)^{\delta-1} g(x; \xi) \quad (3.9)$$

e

$$F_{exp}(x, \xi, \delta) = G(x, \xi)^\delta. \quad (3.10)$$

[Bourguignon, Silva e Cordeiro \(2014\)](#) demonstraram que a pdf da classe Weibull-G pode ser expressa em termos das densidades da Exp-G. Para mais detalhes sobre a Exp-G ver os trabalhos de [Tahir e Nadarajah \(2015\)](#), [Pena-Ramirez et al. \(2018\)](#) e [Martínez-Flórez, Pacheco-López e Tovar-Falón \(2022\)](#).

Se a distribuição-base em (3.3) for considerada uma distribuição uniforme em  $(0, 1)$ , então a pdf e cdf da Nova Transmutada Uniforme ( $U_{NT}$ ) é dada, respectivamente, por

$$f_{U_{NT}}(u) = (1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1} \quad (3.11)$$

e

$$F_{U_{NT}}(u) = (1 + \lambda)u - \lambda u^\alpha, \quad (3.12)$$

em que  $u \in (0, 1)$ .

A variável aleatória  $V$  segue o modelo de distribuição Beta( $\alpha, 1$ ), denotado por  $V \sim B(\alpha, 1)$ , se sua função densidade for dada por

$$f(v) = \alpha v^{\alpha-1}, \quad \text{com } \alpha > 0 \quad e \quad v \in (0, 1). \quad (3.13)$$

A incerteza associada a um modelo de probabilidade pode ser calculada utilizando diversas medidas de informação. Em muitas situações relacionadas com análise de dados de vida, econometria, e demografia, a quantificação da incerteza numa distribuição é muito importante.

A incerteza em uma variável aleatória pode ser medida utilizando os conceitos de informação de Fisher, entropia de Shannon e entropia de Renyi. Apresentamos agora brevemente algumas medidas de informação que serão utilizadas na sequência do trabalho.

A informação de Fisher de uma variável aleatória  $X$ , com pdf  $f(x; \theta)$ , sobre o parâmetro  $\theta$  é definida por (ASADI et al., 2018)

$$\mathcal{I}(\theta) = \int_X \left[ \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(x; \theta) dx. \quad (3.14)$$

Admite-se que  $\theta$  pertence a um intervalo aberto  $I$  da reta real e que  $f(x; \theta) > 0$  para todo  $\theta$  pertencente ao espaço paramétrico e diferenciável com relação a  $\theta$ .

Seja  $X$  uma variável aleatória absolutamente contínua com cdf  $F(x)$  e pdf  $f(x)$ . Então, a entropia de Shannon de  $X$  (ou densidade  $f$ ) é definida por (SHANNON, 1948)

$$H(X) = H(f) = - \int_X f(x) \log\{f(x)\} dx. \quad (3.15)$$

Além destas, algumas medidas de divergência, como a divergência de Kullback-Leibler e a divergência Qui-Quadrado, serão introduzidas para medir a proximidade entre duas distribuições de probabilidade.

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias contínuas com funções densidades absolutamente contínuas  $f$  e  $g$ , respectivamente. Então, a divergência de Kullback-Leibler entre  $X$  e  $Y$  (ou  $f$  e  $g$ ) é definida por (KULLBACK; LEIBLER, 1951)

$$KL(X||Y) = KL(f, g) = \int_X f(x) \log \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} dx. \quad (3.16)$$

Além disso, definimos a divergência qui-quadrado como outra medida relevante entre duas funções de densidade  $f(x)$  e  $g(x)$  (NIELSEN; NOCK, 2013):

$$\chi^2(f, g) = \int_X \frac{[f(x) - g(x)]^2}{g(x)} dx. \quad (3.17)$$

Por fim, a diferença média de Gini (GMD) é uma outra medida de informação relevante que utilizaremos nesta seção. Seja  $X$  uma variável aleatória com função distribuição  $F(x)$ . Então, a GMD associada a  $X$  é definida por

$$GMD(F) = 2 \int_X F(x) \bar{F}(x) dx, \quad (3.18)$$

em que,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  denota a função sobrevivência de  $X$ . Segundo [Yitzhaki \(1982\)](#) a GMD, como medida de variabilidade, compartilha muitas propriedades da variância de  $X$  e é mais adequado para distribuições que estão longe da normalidade.

Algumas propriedades que foram desenvolvidas nesta seção são resultados que generalizam as propriedades do artigo ([KHARAZMI; BALAKRISHNAN, 2021](#)), pois basta fazer  $\alpha = 2$  em (3.2) e (3.3) para obter os resultados do artigo base.

Para simplificar a notação, omitiremos  $\chi$  na integral ao longo do capítulo, a menos que seja necessária uma distinção.

O teorema a seguir diz que a função densidade do gerador NT-G é uma mistura linear entre a densidade da distribuição-base e sua exponenciada.

**Teorema 3.1.1.** Seja  $X \sim NT - G(\alpha, \lambda, \xi)$ , então a função densidade de  $X$  pode ser expressa como a mistura linear

$$f(x; \alpha, \lambda, \xi) = cg(x; \xi) + (1 - c)f_{exp}(x; \xi, \alpha),$$

em que  $c = 1 + \lambda$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x, \alpha, \lambda, \xi) &= [1 + \lambda - \alpha\lambda G(x; \xi)^{\alpha-1}] g(x; \xi) \\ &= (1 + \lambda)g(x; \xi) - \lambda\alpha g(x; \xi)G(x; \xi)^{\alpha-1} \\ &= cg(x; \xi) + (1 - c)f_{exp}(x; \xi, \alpha). \end{aligned} \tag{3.19}$$

□

O resultado do Teorema (3.1.1) desempenha um papel importante neste trabalho, pois podemos obter os momentos, a função geradora e os desvios médios de  $X$ . Expressões explícitas estabelecidas para estas medidas podem ser mais simples comparada aos cálculos de integração numérica.

Através dos momentos é possível estudar algumas características (tendência, dispersão, assimetria e curtose) de um modelo de distribuição probabilidade. A função geradora de momentos da classe NT-G é obtida a partir da expressão

$$\begin{aligned} M_{F_{NT}}(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} [(1 + \lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}(x)] g(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} (1 + \lambda)g(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\lambda e^{tx} G^{\alpha-1}(x)g(x)dx \\ &= (1 + \lambda) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} g(x)dx}_{M_G(t)} + (-\lambda) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \alpha G^{\alpha-1}(x)g(x)dx}_{M_{exp-G}(t)} \\ &= cM_G(t) + (1 - c)M_{exp-G}(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Os Momentos de Probabilidade Ponderada (MPP's) de uma distribuição-base podem ser muito úteis para determinar os momentos de distribuições mais complexas. Os MPP's também são amplamente utilizados para estimar parâmetros de distribuições a partir de amostras completas ou censuradas.

Vamos demonstrar que  $(n, s)$ th MPP de  $X$ , definido por  $\delta_{n,s} = E\{X^n F(X; \xi, \lambda)^S\}$  (para  $n, s = 0, 1, 2, \dots$ ), pode ser expresso como uma combinação linear de PWMs da distribuição-base definida por  $\tau_{n,s} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(X; \xi)^S dx$ . De fato,

$$\begin{aligned}
\delta_{n,r} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n [(1 + \lambda)G(x) - \lambda G^\alpha(x)]^r [1 + \lambda - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}] g(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^n [(1 + \lambda)G(x) + (-\lambda)G^\alpha(x)]^r [1 + \lambda - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}] g(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} [(-\lambda)G^\alpha(x)]^j [(1 + \lambda)G(x)]^{r-j} [1 + \lambda - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}] g(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^r (-\lambda)^j (1 + \lambda)^{r-j} \binom{r}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x)^{(\alpha-1)j+r} [1 + \lambda - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}] g(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^r (-\lambda)^j (1 + \lambda)^{r-j} \binom{r}{j} [(1 + \lambda)\tau_{n,(\alpha-1)j+r} - \alpha\lambda\tau_{n,(\alpha-1)(j+1)+r}]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\tau_{n,s} &= \int_0^1 Q_G(u)^n u^s du = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} u^i u^s du = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} \int_0^1 u^{i+s} du = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} \int_0^1 u^{i+s} du \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} \left[ \frac{u^{i+s+1}}{i+s+1} \right]_0^1 = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} \left[ \frac{1}{i+s+1} \right]
\end{aligned}$$

A entropia é uma medida de variação ou incerteza de uma variável aleatória  $X$ . Duas medidas de entropia bem conhecidas são as entropias de Rényi e Shannon. A entropia de Rényi de uma variável aleatória  $X$  com pdf  $f(x)$  é definida por

$$I_R = (\rho) = \frac{1}{1 - \rho} \log \left( \int_0^{\infty} f^\rho(x) dx \right), \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \rho \neq 1. \tag{3.22}$$

A entropia de Shannon de uma variável aleatória  $X$ , caso especial da entropia de Rényi quando  $\rho \rightarrow 1$ , é definida por  $H(X) = E\{-\log[f(x)]\}$ . O resultado a seguir diz que é possível expressar a entropia de Shannon de  $X \sim \text{NT-G}$  em função da entropia de Shannon das distribuições base, exponenciada, Beta( $\alpha, 1$ ) e Nova Transmutada Uniforme.

**Teorema 3.1.2.** Se  $X \sim \text{NT-G}$ , então a entropia de Shannon é dada por

$$H(X) = (1 + \lambda)H(X_G) - \lambda H(X_{Exp-G}) + \lambda H(V) + H(U_{NT}),$$

em que a variável aleatória  $V \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$ .

*Demonstração.* Se  $X \sim \text{NT-G}$  com pdf dada por (3.3), tem-se, por definição,

$$\begin{aligned}
H(X) &= E\{-\log[f(x)]\} \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log[f(x)] dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda)g(x) - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}g(x)] \log\{[(1+\lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}(x)]g(x)\} dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda)g(x) \log g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x) \log g(x) dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)] \log\{(1+\lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}(x)\} dx.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Note que, por propriedades de logaritmos,  $\log g(x) = \log\{\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}\} - \log\{\alpha G(x)^{\alpha-1}\}$ , e substituindo na segunda integral da linha (3.23), obtem-se:

$$\begin{aligned}
H(X) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda)g(x) \log g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x) \{\log[\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}] - \log[\alpha G(x)^{\alpha-1}]\} dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)] \log[(1+\lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}(x)] dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda)g(x) \log g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x) \log[\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}] dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x) \log[\alpha G(x)^{\alpha-1}] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)] \log[(1+\lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}(x)] dx \\
&= -(1+\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log g(x) dx + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha g(x)G^{\alpha-1}(x) \log[\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}] dx \\
&\quad - \lambda \int_0^1 \alpha v^{\alpha-1} \log[\alpha v^{\alpha-1}] dv - \int_0^1 [(1+\lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}] \log[(1+\lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}] du \\
&= (1+\lambda)H(X_G) - \lambda H(X_{Exp-G}) + \lambda H(V) + H(U_{NT}).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

□

Se definirmos  $\Psi(\lambda, \alpha) = \lambda H(V) + H(U_{NT})$ , então a partir de uma manipulação algébrica, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda, \alpha) &= \lambda \int_0^1 \alpha v^{\alpha-1} \log[\alpha v^{\alpha-1}] dv - \int_0^1 [(1+\lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}] \log[(1+\lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}] du \\
&= \frac{\lambda}{\alpha} - 2\lambda - 1 + \log[\alpha(1+\lambda)]^\lambda - \frac{\alpha\lambda^2\Gamma^2\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right) {}_3F_2\left(1, 1, \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}; 2, \frac{3\alpha-2}{\alpha-1}; \frac{\alpha\lambda}{1+\lambda}\right)}{(1+\lambda)\Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\Gamma\left(\frac{3\alpha-2}{\alpha-1}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Note que a função  $\Psi$  depende apenas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ , ou seja, não depende dos parâmetros da distribuição-base.

**Exemplo 3.1.** Considere que  $X$  segue a distribuição exponencial inversa com pdf igual a  $g(x) = \frac{\beta}{x^2}e^{-\frac{\beta}{x}}$  e fda igual a  $G(x) = e^{-\frac{\beta}{x}}$  (KELLER; KAMATH; PERERA, 1982). Então, a entropia de Shannon da

variável correspondente NT- exponencial inversa é dada por:

$$\begin{aligned}
H(X_{NT}) &= (1 + \lambda)H(X_G) - \lambda H(X_{EXP-G}) + \lambda H(V) + H(U_{NT-G}) \\
&= -(1 + \lambda) \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{x^2} e^{-\frac{\beta}{x}} \log \left[ \frac{\beta}{x^2} e^{-\frac{\beta}{x}} \right] dx + \lambda \int_0^{+\infty} \alpha \frac{\beta}{x^2} e^{-\beta/x} [e^{-\beta/x}]^{\alpha-1} \log \left( \alpha \frac{\beta}{x^2} e^{-\beta/x} [e^{-\beta/x}]^{\alpha-1} \right) dx + \Psi(\lambda, \alpha) \\
&= -(1 + \lambda) \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{x^2} e^{-\frac{\beta}{x}} \log \left[ \frac{\beta}{x^2} e^{-\frac{\beta}{x}} \right] dx + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{x^2} e^{-\beta\alpha/x} \log \left( \frac{\alpha\beta}{x^2} e^{-\beta\alpha/x} \right) dx + \Psi(\lambda, \alpha) \\
&= -(1 + \lambda)(-1 - 2\gamma - \log(\beta)) + \lambda[-1 - 2\gamma - \log(\alpha) - \log(\beta)] + \Psi(\lambda, \alpha) \\
&= 1 + 2\gamma + \log(\beta) - \lambda \log(\alpha) + \Psi(\lambda, \alpha),
\end{aligned}$$

em que  $\gamma$  é definida como a constante de Euler-Mascheroni ( $\approx 0.577216$ ) e  $\Psi(\alpha, \lambda)$  é definida pela Equação (3.25).

Nesta subseção, apresentamos alguns resultados referente à divergência de Kullbak-Leibler entre as densidades da NT-G, EXP-G e distribuição-base.

**Teorema 3.1.3.** A divergência Kullbak-Leibler entre a densidade da distribuição-base,  $g$ , e a densidade da classe NT-G,  $f_{X_{NT}}$ , são dadas por:

- i)  $KL(f_{X_{NT}}, g) = KL(f_{U_{NT}}, g_U)$ ,
- ii)  $KL(g, f_{X_{NT}}) = KL(g_U, f_{U_{NT}})$ ,

em que as variáveis aleatórias  $U_g$  e  $U_f$  são a uniforme e a extensão da transmutada uniforme em  $(0, 1)$  com funções densidades  $g_U$  e  $f_{U_{NT}}$ , respectivamente.

*Demonstração.* i) Usando a definição divergência de Kullbak-Leibler, temos

$$\begin{aligned}
KL(f_{X_{NT}}, g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{NT}}(x) \log \left( \frac{f_{X_{NT}}(x)}{g(x)} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 + \lambda)g(x) - \lambda\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}] \log \left\{ \frac{(1 + \lambda)g(x) - \lambda\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}}{g(x)} \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 + \lambda) - \lambda\alpha G(x)^{\alpha-1}] \log \left\{ (1 + \lambda)g(x) - \lambda\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1} \right\} g(x) dx.
\end{aligned}$$

Se  $u = G(x)$ , então  $du = g(x)dx$ . Logo,

$$\begin{aligned}
KL(f_{X_{NT}}, g) &= \int_0^1 [(1 + \lambda) - \lambda\alpha u^{\alpha-1}] \log \left\{ (1 + \lambda) - \lambda\alpha G(x)^{\alpha-1} \right\} du \\
&= \int_0^1 f_{U_{NT}}(u) \log \left\{ \frac{f_{U_{NT}}(u)}{g(u)} \right\} \\
&= KL(f_{U_{NT}}, g_U).
\end{aligned}$$

ii) De maneira análoga ao item i, temos:

$$\begin{aligned}
KL(g, f_{X_{NT}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log \left\{ \frac{g(x)}{f_{X_{NT}}} \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log \left\{ \frac{g(x)}{(1+\lambda)g(x) - \alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}} \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left\{ \frac{1}{(1+\lambda) - \alpha G(x)^{\alpha-1}} \right\} g(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aplicando a transformação  $u = G(x) \implies du = g(x)dx$ , temos:

$$KL(g, f_{X_{NT}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left\{ \frac{1}{(1+\lambda) - \alpha u^{\alpha-1}} \right\} du = KL(g_U, f_{U_{NT}}).$$

□

**Teorema 3.1.4.** A divergência Kullbak-Leibler entre a densidade da classe NT-G,  $f_{X_{NT}}$ , e a densidade da exponenciada-G,  $f_{exp}$ , são dadas por:

$$i) \quad KL(f_{X_{NT}}, f_{exp}) = KL(f_{U_{NT}}, f_V)$$

$$ii) \quad KL(f_{exp}, f_{X_{NT}}) = KL(f_V, f_{U_{NT}})$$

em que as variáveis aleatórias  $U_f$  e  $V_g$  seguem a extensão da transmutada uniforme em  $(0, 1)$  e distribuição Beta( $\alpha, 1$ ) com densidades  $f_U$  e  $f_V$ , respectivamente.

*Demonstração.* i) Usando a definição divergência de Kullbak-Leibler, temos

$$\begin{aligned}
KL(f_{X_{NT}}, f_{exp}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{NT}}(x) \log \left( \frac{f_{X_{NT}}(x)}{f_{exp}(x)} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda)g(x) - \lambda\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}] \log \left\{ \frac{(1+\lambda)g(x) - \lambda\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}}{\alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}} \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1+\lambda) - \lambda\alpha G(x)^{\alpha-1}] \log \left\{ \frac{(1+\lambda) - \lambda\alpha G(x)^{\alpha-1}}{\alpha G(x)^{\alpha-1}} \right\} g(x) dx.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a transformação  $u = G(x)$ , temos que  $du = g(x)dx$ . Daí,

$$\begin{aligned}
KL(f_{X_{NT}}, f_{exp}) &= \int_0^1 [(1+\lambda) - \lambda\alpha u^{\alpha-1}] \log \left\{ \frac{(1+\lambda) - \lambda\alpha u^{\alpha-1}}{\alpha u^{\alpha-1}} \right\} du \\
&= \int_0^1 f_{U_{NT}}(u) \log \left\{ \frac{f_{U_{NT}}}{f_V(u)} \right\} du \\
&= KL(f_{U_{NT}}, f_V),
\end{aligned}$$

em que  $V \sim \text{beta}(\alpha, 1)$ .

ii) De maneira análoga ao item i, temos:

$$\begin{aligned}
 KL(f_{exp}, f_{X_{NT}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{exp} \log \left( \frac{f_{exp}}{f_{X_{NT}}} \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha g(x) G(x)^{\alpha-1} \log \left( \frac{\alpha g(x) G(x)^{\alpha-1}}{(1+\lambda)f(x) - \alpha g(x) G(x)^{\alpha-1}} \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha G(x)^{\alpha-1} \log \left( \frac{\alpha G(x)^{\alpha-1}}{(1+\lambda) - \alpha G(x)^{\alpha-1}} \right) g(x) dx.
 \end{aligned}$$

Aplicando a transformação  $u = G(x) \implies du = g(x)dx$ , temos:

$$\begin{aligned}
 KL(f_{exp}, f_{X_{NT}}) &= \int_0^1 \alpha u^{\alpha-1} \log \left( \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{(1+\lambda) - \alpha u^{\alpha-1}} \right) du \\
 &= \int_0^1 f_V(u) \log \left( \frac{f_V(u)}{f_{U_{NT}(u)}} \right) du \\
 &= KL(f_V, f_{U_{NT}}),
 \end{aligned}$$

em que  $V \sim \text{beta}(\alpha, 1)$ . □

**Teorema 3.1.5.** A divergência Qui-Quadrado entre  $f_{exp}$  e  $f_{X_{NT}}$  ( e  $f_{X_{NT}}$  e  $g$ ) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \chi^2(f_{exp}, f_{X_{NT}}) &= \chi^2(f_V, f_{U_{NT}}) = \frac{(\lambda+1)[{}_2F_1(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}) - (\lambda+1)]}{\lambda^2} \\
 \text{ii) } \chi^2(f_{X_{NT}}, g) &= \chi^2(f_{U_{NT}}, g_U) = \frac{\lambda^2(\alpha-1)^2}{2\alpha-1} \\
 \text{iii) } \chi^2(g, f_{X_{NT}}) &= \chi^2(f_U, f_{U_{NT}}) = \frac{{}_2F_1(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}) - (\lambda+1)}{(\lambda+1)}.
 \end{aligned}$$

*Demonstração.* i)

$$\begin{aligned}
 \chi^2(f_{exp}, f_{X_{NT}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_{exp}(x) - f_{X_{NT}}(x)]^2}{f_{X_{NT}}(x)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\alpha g(x) G(x)^{\alpha-1} - (1+\lambda)g(x) + \alpha\lambda g(x) G(x)^{\alpha-1}\}^2}{(1+\lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x) G(x)^{\alpha-1}} dx,
 \end{aligned}$$

substituindo  $u = G(x) \implies du = g(x)dx$ , temos

$$\begin{aligned}
\chi^2(f_{exp}, f_{X_{NT}}) &= \int_0^1 \frac{[\alpha u^{\alpha-1} - (1 + \lambda) + \alpha \lambda u^{\alpha-1}]^2}{(1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1}} du = \chi^2(f_V, f_{U_{NT}}) \\
&= \int_0^1 \frac{[(\alpha u^{\alpha-1} - 1)(1 + \lambda)]^2}{(1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1}} du \\
&= (1 + \lambda)^2 \int_0^1 \frac{(\alpha u^{\alpha-1} - 1)^2}{(1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1}} du \\
&= (1 + \lambda)^2 \left\{ \frac{u {}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{u^{\alpha-1}\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) + (\lambda+1)((\lambda-1)u - \lambda u^\alpha)}{\lambda^2(\lambda+1)} \right\}_0^1 \\
&= \frac{(\lambda+1) \left[ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) - (\lambda+1) \right]}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\chi^2(f_{X_{NT}}, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_{X_{NT-G}}(x) - g(x)]^2}{g(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{(1 + \lambda)g(x) - \alpha \lambda g(x)G(x)^{\alpha-1} - g(x)\}^2}{g(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{(1 + \lambda) - \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1} - 1\}^2}{g(x)} g^2(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [(1 + \lambda) - \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1} - 1]^2 g(x) dx.
\end{aligned}$$

Se  $u = G(x)$ , então  $du = g(x)dx$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
\chi^2(f_{X_{NT}}, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} [(1 + \lambda) - \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1} - 1]^2 g(x) dx \\
&= \int_0^1 [(1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1} - 1]^2 du \\
&= \chi^2(f_{U_{NT-G}}, g_U) \\
&= \int_0^1 (\lambda - \alpha \lambda u^{\alpha-1})^2 du \\
&= \lambda^2 \int_0^1 (1 - \alpha u^{\alpha-1})^2 du \\
&= \lambda^2 \left[ \frac{\alpha^2 u^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} - 2u^\alpha + u \right]_0^1 \\
&= \frac{\lambda^2(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\chi^2(g, f_{X_{NT}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[g(x) - f_{X_{NT-G}}(x)]^2}{f_{X_{NT-G}}(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{g(x) - (1 + \lambda)g(x) + \alpha\lambda g(x)G(x)^{\alpha-1}\}^2}{(1 + \lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G(x)^{\alpha-1}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{1 - (1 + \lambda) + \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}\}^2}{(1 + \lambda) - \alpha\lambda G(x)^{\alpha-1}} g(x) dx = \chi^2(f_U, f_{U_{NT-G}}). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Substituindo  $u = G(x) \implies du = g(x)dx$ , temos

$$\begin{aligned}
\chi^2(f, f_{X_{NT}}) &= \int_0^1 \frac{\{1 - (1 + \lambda) + \alpha\lambda u^{\alpha-1}\}^2}{(1 + \lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}} du \\
&= \lambda^2 \int_0^1 \frac{(-1 + \alpha u^{\alpha-1})^2}{(1 + \lambda) - \alpha\lambda u^{\alpha-1}} du \\
&= \lambda^2 \left\{ \frac{u {}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{u^{\alpha-1}\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) + (\lambda+1)((\lambda-1)u - \lambda u^\alpha)}{\lambda^2(\lambda+1)} \right\}_0^1 \\
&= \left\{ \frac{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) - (\lambda+1)}{(\lambda+1)} \right\}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.1.6.** A informação de Fisher para  $\lambda$  da NT-G com pdf igual a (3.3) é dada por

$$I(\lambda) = \int \frac{[g(x) - f_{exp}(x)]^2}{f_{X_{NT}}} dx = (1 + \lambda^2) \chi^2(f_{exp}, f_{X_{NT}}). \tag{3.28}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= E \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_{X_{NT}}(X) \right]^2 \\
&= E \left[ \frac{g(X) - \alpha g(X)G^{\alpha-1}(X)}{f_{X_{NT}}(X)} \right]^2 \\
&= \int \left[ \frac{g(x) - \alpha g(x)G^{\alpha-1}(x)}{(1 + \lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)} \right]^2 [(1 + \lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)] dx \\
&= \int \frac{[g(x) - \alpha g(x)G^{\alpha-1}(x)]^2}{(1 + \lambda)g(x) - \alpha\lambda g(x)G^{\alpha-1}(x)} dx \\
&= \int \frac{[1 - \alpha G^{\alpha-1}]^2}{(1 + \lambda) - \alpha\lambda G^{\alpha-1}} g(x) dx.
\end{aligned}$$

Faça  $u = F(x)$  e  $du = f(x)dx$ . Daí,

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \int_0^1 \frac{[1 - \alpha u^{\alpha-1}]^2}{(1 + \lambda) - \alpha \lambda u^{\alpha-1}} du \\
&= \left[ \frac{u {}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}; \frac{\alpha}{\alpha-1}; \frac{u^{\alpha-1}\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) - (\lambda+1)(\lambda u^\alpha - \lambda u + u)}{\lambda^2(\lambda+1)} \right]_0^1 \\
&= \frac{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}; \frac{\alpha}{\alpha-1}; \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) - (\lambda+1)}{\lambda^2(\lambda+1)} \\
&= (1 + \lambda^2)\chi^2(f_{exp}, f_{X_{NT}}).
\end{aligned}$$

□

Note que podemos escrever, a partir do Teorema (3.1.6), a Informação de fisher por

$$I(\lambda) = \frac{{}_2F_1\left(1, \frac{1}{\alpha-1}; \frac{\alpha}{\alpha-1}; \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\right) - (\lambda+1)}{\lambda^2(\lambda+1)}. \quad (3.29)$$

Nesta subseção, obtemos uma expressão para a GMD da função de distribuição acumulada do gerador NT-G.

**Teorema 3.1.7.** Se  $F_{X_{NT}}$  é a cdf dada em (3.2), então a GMD associada é expressa por

$$\text{GMD}(F_{X_{NT}}) = (1 + \lambda^2) \text{GMD}(G) + \lambda^2 \text{GMD}(F_{exp}) - 2\lambda(1 + \lambda) \int_0^1 \frac{u(1 + u^{\alpha-1} - 2u^\alpha)}{g(G^{-1}(u))} du \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Seja  $F_{X_{NT}}(x) = (1 + \lambda)G(x) - \lambda G(x)^\alpha$ . Então, podemos rescrever a função sobrevivência da forma:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{X_{NT}}(x) &= 1 - (1 + \lambda)G(x) + \lambda G^\alpha(x) = 1 - G(x) - \lambda G(x) + \lambda G^\alpha(x) \\
&= 1 - G(x) + \lambda - \lambda G(x) - \lambda + \lambda G^\alpha(x) \\
&= (1 - G(x)) + \lambda(1 - G(x)) - \lambda + \lambda G^\alpha(x) \\
&= \bar{G}(x) + \lambda \bar{G}(x) - \lambda + \lambda G^\alpha(x) \\
&= (1 + \lambda)\bar{G}(x) - \lambda(1 - G^\alpha(x)).
\end{aligned} \quad (3.31)$$

De acordo com a Definição (3.18), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}DMG(F_{X_{NT}}) &= \int \bar{F}_{X_{NT}} F_{X_{NT}} dx \\
&= \int [(1 + \lambda)\bar{G}(x) - \lambda(1 - G^\alpha(x))] [1 - ((1 + \lambda)\bar{G}(x) - \lambda(1 - G^\alpha(x)))] dx \\
&= \int (1 + \lambda)\bar{G}(x) dx - \int \lambda(1 - G^\alpha(x)) dx - \underbrace{(1 + \lambda)^2 \int \bar{G}^2(x) dx}_{A} + 2\lambda(1 + \lambda) \int \bar{G}(x)(1 - G^\alpha(x)) dx \\
&\quad - \underbrace{\lambda^2 \int (1 - G^\alpha(x))^2 dx}_{B}.
\end{aligned}$$

A partir de uma manipulação algébrica nas expressões A e B, e considerando  $u = G(x)$ , segue que

$$\begin{aligned}
&= (1 + \lambda) \int (1 - G(x)) dx - \lambda \int (1 - G^\alpha(x)) dx - \underbrace{(1 + \lambda)^2 \int (1 - G(x)) dx}_{A1} + \underbrace{(1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx}_{A2} \\
&+ 2\lambda(1 + \lambda) \int \overline{G}(x)(1 - G^\alpha(x)) dx + \underbrace{\lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx}_{B1} - \underbrace{\lambda^2 \int (1 - G^\alpha(x)) dx}_{B2} \\
&= \underbrace{(1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx}_{A2} + \underbrace{\lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx}_{B1} + (1 + \lambda) \int (1 - G(x)) dx - \lambda \int (1 - G^\alpha(x)) dx \\
&- \underbrace{(1 + \lambda)^2 \int (1 - G(x)) dx}_{A1} + 2\lambda(1 + \lambda) \int \overline{G}(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \underbrace{\lambda^2 \int (1 - G^\alpha(x)) dx}_{B2} \\
&= (1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx + \lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int (1 - G(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int (1 - G^\alpha(x)) dx \\
&- 2\lambda(1 + \lambda) \int \overline{G}(x)(1 - G^\alpha(x)) dx \\
&= (1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx + \lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int \{1 - G(x) + 1 - G^\alpha(x) - 2(1 - G(x))(1 - G^\alpha(x))\} dx \\
&= (1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx + \lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int \{-G(x) - G^\alpha(x) + 2G(x) + 2G^\alpha(x) - 2G^{\alpha+1}\} dx \\
&= (1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx + \lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int \{G(x) + G^\alpha(x) - 2G^{\alpha+1}\} dx \\
&= (1 + \lambda^2) \int G(x)(1 - G(x)) dx + \lambda^2 \int G^\alpha(x)(1 - G^\alpha(x)) dx - \lambda(1 + \lambda) \int G(x) [1 + G^{\alpha-1}(x) - 2G^\alpha(x)] dx \\
&= (1 + \lambda^2) DMG(G) + \lambda^2 DMG(F_{exp}) - \lambda(1 + \lambda) \int_0^1 \frac{u(1 + u^{\alpha-1} - 2u^\alpha)}{g(G^{-1}(u))} du.
\end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir traz uma aplicação do modelo Beta( $\alpha, 1$ ) à distribuição-base do gerador para ilustrar o teorema (3.1.7).

**Exemplo 3.2.** Considere que  $X \sim \text{Beta}(\delta, 1)$  com cdf  $G(x) = x^\delta$ ,  $0 < x < 1$ ,  $\delta > 0$ . Então, a GMD da  $F_{X_{NT}}$  é dada por

$$\begin{aligned}
\text{GMD}(F_{X_{NT}}) &= (1 + \lambda^2) \text{GMD}(G) + \lambda^2 \text{GMD}(F_{exp}) - 2\lambda(1 + \lambda) \int_0^1 \frac{u(1 + u^{\alpha-1} - 2u^\alpha)}{g(G^{-1}(u))} du \\
&= (1 + \lambda^2) \int_0^1 x^\delta (1 - x^\delta) dx + \lambda^2 \int_0^1 x^{\delta\alpha} (1 - x^{\delta\alpha}) dx - 2\lambda(1 + \lambda) \int_0^1 x^\delta [1 + x^{\delta(\alpha-1)} - 2x^{\alpha\delta}] dx \\
&= (1 + \lambda^2) \left[ \frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} - \frac{x^{2\delta+1}}{2\delta+1} \right]_0^1 + \lambda^2 \left[ \frac{x^{\delta\alpha+1}}{\delta\alpha+1} - \frac{x^{2\delta\alpha+1}}{2\delta\alpha+1} \right]_0^1 - 2\lambda(1 + \lambda) \left[ \frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{x^{\delta(\alpha-1)+\delta+1}}{\delta(\alpha-1)+\delta+1} - \frac{2x^{\alpha\delta+\delta+1}}{\alpha\delta+\delta+1} \right]_0^1 \\
&= (1 + \lambda^2) \left[ \frac{1}{\delta+1} - \frac{1}{2\delta+1} \right] + \lambda^2 \left[ \frac{1}{\delta\alpha+1} - \frac{1}{2\delta\alpha+1} \right] - 2\lambda(1 + \lambda) \left[ \frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{\alpha\delta+1} - \frac{2}{(\alpha+1)\delta+1} \right] \\
&= (1 + \lambda^2) \left[ \frac{\delta}{(\delta+1)(2\delta+1)} \right] + \lambda^2 \left[ \frac{\delta\alpha}{(\delta\alpha+1)(2\delta\alpha+1)} \right] - 2\lambda(1 + \lambda) \left[ \frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{\alpha\delta+1} - \frac{2}{(\alpha+1)\delta+1} \right].
\end{aligned}$$

**Corolário 3.1.** Suponha que  $G$ ,  $F_{exp}$  e  $F_{X_{NT}}$  tenham suas medidas GMD como  $GMD(G)$ ,  $GMD(F_{exp})$  e  $GMD(F_{X_{NT}})$ , respectivamente. Então:

1. Se  $\lambda \in [-1, 0]$ , então

$$GMD(F_{X_{NT}}) \geq (1 + \lambda^2) DMG(G) + \lambda^2 DMG(F_{exp}).$$

2. Se  $\lambda \in [0, 1]$ , então

$$GMD(F_{X_{NT}}) \leq (1 + \lambda^2) DMG(G) + \lambda^2 DMG(F_{exp}).$$

O resultado do Corolário (3.1) é obtido facilmente a partir do Teorema (3.1.7).

## 3.2 Transformada de Mellin

A TM, desenvolvida por Robert Hjalmar Mellin, é uma ferramenta alternativa à Transformada de Fourier, sendo utilizada em diversas áreas, como: matemática, física e engenharia.

Se tratando de estatística, as maiores aplicações da TM são quando a variável estudada assume valores em  $\mathbb{R}_+$ , possibilitando a análise de imagens de radar polarimétrico, como é o exemplo nos trabalhos de (ANFINSEN; ELTOFT, 2011; BOMBRUN; BEAULIEU, 2008).

Portanto, a TM considera  $X$  uma variável aleatória que assume valores positivos com fda  $F(x)$  e que pode ser definida de acordo com (NICOLAS, 2005):

$$\phi_x(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} dF(x) dx = E(X^{s-1}), \quad (3.32)$$

na qual esta função é denominada primeira função característica de segundo tipo, em que  $s \in \mathbb{C}$ .

Para encontrarmos a segunda função característica de segundo tipo, aplicamos o logaritmo natural na Equação (3.32):

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)).$$

Na próxima subseção mostramos que a transformada de Mellin da classe NT-G pode ser obtida diretamente pelos MPP da distribuição-base.

## 3.3 Momentos Ponderados de Probabilidade - MPP

Os MPP, denotados por  $M_{i,j,k}$ , são generalizações dos momentos usuais para distribuições de probabilidade e foi introduzido por Greenwood et al. (1979). Eles são definidos por:

$$\begin{aligned}
M_{i,j,k} &= E\{X^i F(X)^j [1 - F(X)]^k\} \\
&= \int_0^1 Q[F(x)]^i F(x)^j [1 - F(x)]^k dF(x),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

em que  $i, j, k \in \mathbb{R}$  e  $Q(\cdot)$  representa a função quantílica.

A Tabela 8 fornece os MPP geral das distribuições-base, além de dois casos específicos que serão utilizados no Teorema 3.3.1.

Tabela 8 – MPP da distribuição-base para classe NT-G

Modelos	$M_{i,j,k}$	$M_{i,0,0}$	$M_{i,1,0}$
Weibull	$\sigma^i \Gamma\left(1 + \frac{i}{\sigma}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{j}{r} \frac{(-1)^r}{(k+r+1)^{1+i/\sigma}}$	$\sigma^i \cdot \Gamma\left(1 + \frac{i}{\eta}\right)$	$\sigma^i \cdot \Gamma\left(1 + \frac{i}{\eta}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{1+i/\eta}}\right)$
Fréchet	$\sigma^i \Gamma\left(1 - \frac{i}{\sigma}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{(j+r+1)^{1-i/\sigma}}$	$\sigma^i \cdot \Gamma\left(1 - \frac{i}{\eta}\right)$	$\sigma^i \Gamma\left(1 - \frac{i}{\eta}\right) \left(\frac{1}{2^{1-i/\eta}}\right)$

A seguir, tem-se o principal teorema deste capítulo, o qual é possível calcular a primeira fc do tipo II como uma combinação linear dos MPP da distribuição-base.

**Teorema 3.3.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com fdp dada por (3.3), então a primeira fc do tipo II é calculado por

$$\phi_X(s) = (1 + \lambda) \cdot M_{s-1,0,0} - \alpha \lambda \cdot M_{s-1,\alpha-1,0} \quad , \quad |\lambda| \leq 1 \tag{3.34}$$

com  $s \in \mathbb{C}$ , em que  $M_{i,j,k}$  é o MPP da distribuição-base.

*Demonstração.* Seja  $f(x) = [1 + \lambda - \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1}] g(x)$  a fdp da classe NT-G, onde  $G(x)$  é a fda da distribuição-base. Então,

$$\begin{aligned}
\phi_X(s) &= E\{X^{s-1}\} = \int x^{s-1} f(x) dx \\
&= \int x^{s-1} g(x) [1 + \lambda - \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1}] dx \\
&= \int x^{s-1} g(x) (1 + \lambda) dx - \int x^{s-1} g(x) \alpha \lambda G(x)^{\alpha-1} dx \\
&= (1 + \lambda) \int x^{s-1} g(x) dx - \alpha \lambda \int x^{s-1} g(x) G(x)^{\alpha-1} dx \\
&= (1 + \lambda) \int x^{s-1} dG(x) - \alpha \lambda \int x^{s-1} G(x)^{\alpha-1} dG(x) \\
&= (1 + \lambda) \cdot M_{s-1,0,0} - \alpha \lambda \cdot M_{s-1,\alpha-1,0}.
\end{aligned}$$

□

Utilizando o Teorema 3.3.1, foi construída a Tabela 9 em que é possível observar as expressões para Transformada de Mellin dos modelos abordados neste trabalho. O desenvolvimento para obter essas expressões encontra-se no Apêndice C.

Tabela 9 – Transformada de Mellin para a distribuição-base da classe NT-G

Modelos	Transformada de Mellin
NTW	$\sigma^{s-1} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) \left(1 + \lambda - \alpha \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} \frac{(-1)^m}{(m+1)^{1+(s-1)/\eta}}\right)$
NTF	$(1 + \lambda - \lambda \alpha^{(s-1)/\eta}) \sigma^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right)$

### 3.4 Método dos Log-cumulates

A TM tem analogia com as estatísticas tradicionais, podendo produzir momentos e cumulantes a partir de suas funções características. Deste modo, os Log-Momentos (LMs) ou  $\tilde{m}_v$ , com  $v \in \mathbb{N}$ , são definidos por (NICOLAS; ANFINSEN, 2002):

$$\tilde{m}_v = \left. \frac{d^v \phi_X(s)}{ds^v} \right|_{s=1}, \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (3.35)$$

Os log-cumulantes (LCs) de ordem  $v$  do tipo II, são obtidos a partir da  $v$ -ésima derivada da segunda fc do tipo II, quando  $s = 1$ :

$$\tilde{k}_v = \left. \frac{d^v \psi_x(s)}{ds^v} \right|_{s=1} = \left. \frac{d^v \log[\phi_X(s)]}{ds^v} \right|_{s=1}, \quad \forall v \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Existe uma relação analítica entre os LMs e LCs que é similar aos momentos clássicos e seus log-cumulantes (LEHMANN; CASELLA, 2006). Os três primeiros LCs podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \tilde{m}_1, \\ \tilde{k}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2, \\ \tilde{k}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_1^3. \end{cases} \quad (3.37)$$

De maneira geral, os LCs de ordem  $v$  podem ser generalizados, como (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011):

$$\tilde{k}_v = \tilde{m}_v - \sum_{r=1}^{v-1} \binom{v-1}{r-1} \tilde{k}_r \tilde{m}_{v-r}, \quad (3.38)$$

em que  $\tilde{m}_v$  pode ser substituído pelos LMs amostrais:

$$\hat{\tilde{m}}_v = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (\log x_r)^v, \quad (3.39)$$

sendo  $n$  o tamanho da amostra e  $x_r$  é a  $r$ -ésima observação da amostra.

Na Tabela (10) são apresentados os quatros primeiros LCs para os modelos citados da classe NT-G, em que  $\psi^{(n)}(x)$  é a função poligama de ordem  $n$ .

Tabela 10 – LCs para as distribuições-base da NT-G.

Modelo	Log-cumulantes
NTW	$\tilde{k}_1 = \log(\sigma) + \frac{1}{\eta} [\psi^{(0)}(1) - \lambda \log \alpha]$
	$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + \lambda(1 - \lambda) \log^2 \alpha]$
	$\tilde{k}_3 = \frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) - \lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda) \log^3 \alpha]$
	$\tilde{k}_4 = \frac{1}{\eta^4} [\psi^{(3)}(1) + \lambda(1 - \lambda)(6\lambda(\lambda - 1) + 1) \log^4 \alpha]$
NTF	$\tilde{k}_1 = \log(\sigma) - \frac{1}{\eta} [\psi^{(0)}(1) + \lambda \log \alpha]$
	$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) - \lambda(1 + \lambda) \log^2 \alpha]$
	$\tilde{k}_3 = -\frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) + \lambda(1 + \lambda)(1 + 2\lambda) \log^3 \alpha]$
	$\tilde{k}_4 = \frac{1}{\eta^4} [\psi^{(3)}(1) - \lambda(\lambda + 1)(6\lambda(\lambda + 1) + 1) \log^4 \alpha]$

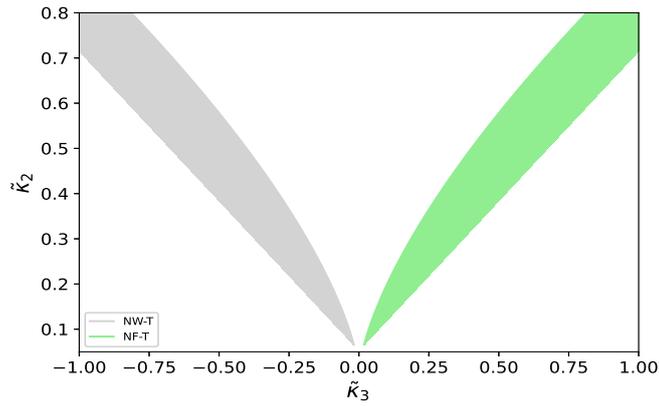
Apresentaremos as medidas de bondade de ajuste para os modelos de probabilidade NTW e NTF. Aqui, consideraremos duas medidas: uma qualitativa e outra quantitativa.

### 3.5 Diagrama de Log-cumulantes

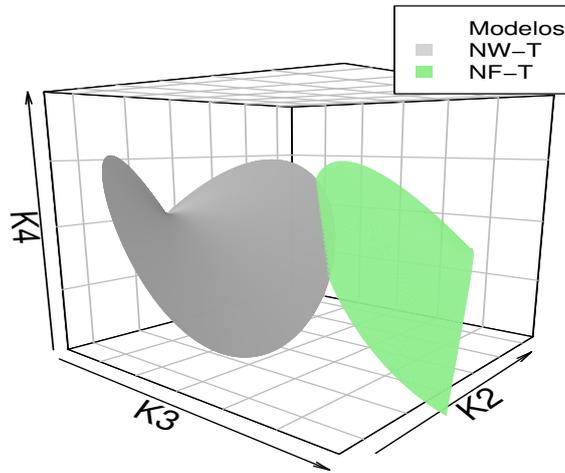
Como alternativa ao Diagrama de Pearson, (NICOLAS, 2005) apresenta uma a qual chamamos de diagrama de log-cumulantes. Este diagrama considera as estatísticas  $\tilde{k}_3$  e  $\tilde{k}_2$ , que são encontradas a partir da Equação (3.38) o que nos permite uma solução analítica tratável quando comparado ao Diagrama de Pearson.

Portanto, aqui utilizaremos o Diagrama de log-cumulantes ou diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  como uma ferramenta inicial qualitativa para avaliar qual das distribuições em análise consegue modelar um determinado conjunto de dados.

A Figura 8, nos mostra as regiões do diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  referentes aos modelos da classe TC. A representação dos modelos no diagrama dependem diretamente da quantidade de parâmetros contidos nas expressões dos LCs. Sendo assim, os modelos podem ser representados por curvas, desde que se tenha apenas um parâmetro nas expressões; subespaços para expressões com dois ou mais parâmetros, sendo possível nessa última opção, uma representação em 3D, quando adicionamos o quarto log-cumulante  $(\tilde{k}_4)$  (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011; ANFINSEN; ELTOFT, 2011). De forma especial, apresentaremos aqui o diagrama em 2D e 3D dos modelos em estudo, visto que as expressões dos log-cumulantes dos modelos NTW e NTF dependem de quatro parâmetros.



((a)) 2D.



((b)) 3D.

Figura 8 – Diagrama de LCs 2D e 3D dos modelos da classe NT-G.

### 3.6 Método de estimação por LCs

A estimativa pelo método dos Log-cumulantes (MLC) ocorre de forma semelhante ao método dos Momentos. As estimativas dos parâmetros são obtidas resolvendo o sistema de equações formado pela equação das expressões dos LCs amostrais fornecidos em (3.39) com os LCs teóricos dado na Tabela (10). Resolvendo este sistema de equações, as estimativas do método MLC são obtidas.

Para a distribuição NTW, tem-se

$$\hat{\sigma} = \exp \left\{ \hat{m}_1 - \frac{1}{\hat{\eta}} [\psi(1) - \hat{\lambda} \log(\hat{\alpha})] \right\},$$

e

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{[\psi^{(1)}(1) + [\log(\hat{\alpha})]^2(1 - \hat{\lambda})\hat{\lambda}]}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\alpha}$  pode ser definido como a solução do sistema de equações não linear abaixo:

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{\psi^{(2)}(1)(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2} - [\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3][\psi^{(1)}(1) + \hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda})\log^2(\hat{\alpha})]^{3/2}}{(1 - \hat{\lambda})(1 - 2\hat{\lambda})\log^3(\hat{\alpha})(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2}} \\ \hat{\alpha} = \exp \left\{ \left[ \frac{[\hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 - 3\hat{m}_2^2 + 12\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 6\hat{m}_1^4][\psi^{(1)}(1) + \hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda})\log^2(\hat{\alpha})]^2 - \psi^{(3)}(1)[\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2]^2}{\hat{\lambda}(1 - \hat{\lambda})(6\hat{\lambda}(\hat{\lambda} - 1) + 1)[\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2]^2} \right]^{1/4} \right\} \end{cases}$$

Para a distribuição NTF tem-se

$$\hat{\sigma} = \exp \left\{ \hat{m}_1 + \frac{1}{\hat{\eta}} [\psi(1) + \log(\hat{\alpha})\hat{\lambda}] \right\}$$

e

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\psi^{(1)}(1) - [\log(\hat{\alpha})]^2\hat{\lambda}[1 + \hat{\lambda}]}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}}.$$

Além disso,  $\hat{\lambda}$  pode ser definido como a solução do sistema de equações não linear abaixo:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{-\psi^{(2)}(1)(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2} - (\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3)(\psi^{(1)}(1) - \hat{\lambda}(1 + \hat{\lambda})\log^2\hat{\alpha})^{3/2}}{\hat{\lambda}(1 + \hat{\lambda})(1 + 2\hat{\lambda})(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^{3/2}}} \right\} \\ \hat{\lambda} = \frac{\psi^{(3)}(1)(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^2 - (\hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 - 3\hat{m}_2^2 + 12\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 6\hat{m}_1^4)(\psi^{(1)}(1) - \hat{\lambda}(1 + \hat{\lambda})\log^2\hat{\alpha})^2}{(\hat{\lambda} + 1)(6(\hat{\lambda} + 1) + 1)\log^4\hat{\alpha}(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)^2} \end{cases}$$

### 3.7 Estatística $T^2$ de Hotelling e LCs

A estatística  $T^2$  de Hotteling trata de uma generalização multivariada da estatística t de Student e surge como uma alternativa para avaliar as medidas de bondade de ajuste. Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  um vetor de variáveis aleatórias, em que  $\mathbf{x}$  é um vetor Normal  $\nu$ -dimensional  $\mathbf{x} \sim N_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$  é

o vetor médio populacional e  $\Sigma = E((\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T)$  é a matriz de covariância. A estatística de Hotelling [(ANDERSON, 1958), p. 170] é dada por

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \quad (3.40)$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra,  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j$  é o vetor médio da amostra e  $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T$  é a matriz de covariância da amostra.

De acordo com (JOHNSON; WICHERN et al., 2002) as estatísticas  $T^2$  seguem uma distribuição  $\frac{(n-1)\nu}{(n-\nu)} F_{\nu, n-\nu}$ , em que  $F_{\nu, n-\nu}$  é a distribuição F-Snedecor com  $\nu$  e  $n - \nu$  graus de liberdade, e se aproxima da sua distribuição limite, qui-quadrado  $\chi_{(n)}^2$ , para grandes amostras. (ANFINSEN; ELTOFT, 2011).

Na seção anterior, foi realizado um estudo qualitativo a partir do diagrama de LCs. Nesta seção, propomos uma medida de bondade de ajuste quantitativa, objetivando a inserção dos LCs na estatística  $T^2$  de Hotelling, que nos mostrará numericamente qual distribuição consegue modelar os dados em estudo através de um teste de hipótese.

Assim, para um nível de significância  $\zeta$  e sob a hipótese  $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$

$$\begin{aligned} \zeta &= P \left[ T^2 > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\zeta) \right] \\ &= P \left[ n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\zeta) \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que  $F_{\nu, n-\nu}(\zeta)$  denota o percentil superior da distribuição  $F_{\nu, n-\nu}$ . Esta afirmação (3.41) leva imediatamente à rejeição de  $H_0$  se

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) > \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\zeta). \quad (3.42)$$

Analogamente, o teste da razão de verossimilhança rejeita  $H_0$  com um nível de significância  $\zeta$ , se  $T^2 \geq \frac{(n-1)\nu}{n-\nu} F_{\nu, n-\nu}(\zeta)$  (ANDERSON, 1958).

A proposta de incorporar os LCs à estatística  $T^2$  visa categorizar o ajuste do modelo ao conjunto de dados com base na localização do diagrama estimado  $\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}^T$ . Para isso, exigimos uma estatística de teste para a hipótese nula  $H_0 : E\left(\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$  em que esse teste “abre caminhos” para aceitar ou não a adequação dos LCs estimados para regiões específicas do diagrama. Por existir uma relação entre os parâmetros da distribuição e os LCs (quantidades analiticamente bem definidas, ver Tabela 4), é possível encontrar estimadores para os LCs. Desta forma, consideraremos as seguintes quantidades:

$$\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_p)^T \text{ e } \hat{m} = (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_p)^T.$$

Pelo teorema do limite central de Cramér-Wold, temos

$$\sqrt{n}(\hat{m} - \tilde{m}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_v(0, \mathbf{M}_v),$$

em que a amostra segue a distribuição normal multivariada com média  $\boldsymbol{\mu}$  e matriz de covariância  $\boldsymbol{\Sigma}$ , denotado por  $x \sim \mathcal{N}_v(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , e  $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D}$  denota convergência em distribuição. Além disso, temos que  $\mathbf{M}_v$  é definido por

$$\text{Cov}(\hat{m}_r, \hat{m}_j) = n\mathbb{E} \{(\hat{m} - \tilde{m})(\hat{m} - \tilde{m})^T\} = \{\tilde{m}_{r+j} - \tilde{m}_r\tilde{m}_j\} \Big|_{r,j=1}^v. \quad (3.43)$$

Ainda, considerando as funções compostas que transformam os momentos para log-cumulantes, temos:

$$\tilde{k}_v = g_v(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_v) \text{ e } \hat{k}_v = g_v(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_v).$$

Assim, pelo teorema do limite central de Cramér-Wold, temos

$$\sqrt{n}(\hat{k} - \tilde{k}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_v(0, \mathbf{K}_v),$$

em que,

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{J}_v^T \cdot \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{J}_v, \quad (3.44)$$

$$\nabla g_v = \left[ \frac{dg_v(\tilde{m})}{d\tilde{m}_1}, \dots, \frac{dg_v(\tilde{m})}{d\tilde{m}_v} \right]$$

e

$$\mathbf{J}_v = [\nabla g_1 | \dots | \nabla g_v].$$

Além disso, de acordo com o método delta generalizado (BILODEAU; BRENNER, 1999), se considerarmos grandes amostras, o vetor estimado  $\left[ \begin{smallmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{smallmatrix} \right]^T$  segue uma distribuição normal bivariada com média  $\left[ \begin{smallmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{smallmatrix} \right]^T$  e uma matriz de covariância assintótica  $\mathbf{K}_2$ , ou seja

$$\left( \left[ \begin{smallmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{smallmatrix} \right] \right) \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_2(0, \mathbf{K}_2) \quad (3.45)$$

em que  $\stackrel{a}{\sim}$  indica uma distribuição assintótica.

Neste caso, comparando o resultado obtido na equação (3.45) com a estatística de Hotelling  $T^2$  expressa em (3.40), temos  $\boldsymbol{\mu} = \left[ \begin{smallmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{smallmatrix} \right]^T$  e  $\bar{\mathbf{x}} = \left[ \begin{smallmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{smallmatrix} \right]^T$ . A matriz  $S$  em (3.40) será substituída pela matriz de covariância assintótica estimada  $\hat{\mathbf{K}}_2$ . Portanto, para um nível de significância específico  $\alpha$ , temos a seguinte estatística de teste:

$$T^2 = n \left( \left[ \begin{smallmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{smallmatrix} \right] \right)^T \hat{\mathbf{K}}_2^{-1} \left( \left[ \begin{smallmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{smallmatrix} \right] \right), \quad (3.46)$$

em que  $\hat{\mathbf{K}}_2^{-1}$  é assumida uma matriz não-singular, caso contrário, utiliza-se a inversa generalizada de Moore-Pearson.

Já mencionamos que para grandes amostras a distribuição associada a variável aleatória de  $T^2$  segue a distribuição  $\chi_\nu^2$ . Assim, é possível empregar em (3.46) a aproximação  $F_{\nu, n-\nu}(\cdot) \approx \chi_\nu^2(\cdot)$ , em que  $\chi_\nu^2(\cdot)$  representa o percentil superior da distribuição  $\chi_\nu^2$ . Além disso, podemos obter as elipses de confiança com o nível de significância  $\zeta$ , dadas por:

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T \hat{\mathbf{K}}_2^{-1} \left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right) \leq \frac{2(n-1)}{n(n-2)} \chi_2^2(\zeta), \quad (3.47)$$

em que  $\chi_2^2(\zeta)$  é o percentil superior para  $\chi_2^2$ . A elipse em (3.47) está centrada em  $(\tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$  e eixos orientados de acordo com os autovetores da matriz  $\hat{\mathbf{K}}_2$ .

Em seguida, expressaremos a proposição que nos mostra a estatística  $T^2$  de Hotelling para os modelos em estudo.

**Proposição 1:** Seja X uma variável aleatória que segue a distribuição NT-G com parâmetros  $\eta > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda$  com  $|\lambda| \leq 1$ , então a estatística  $T^2$  de Hotelling, baseada nos LCs, é dada por:

$$T_{NT-G}^2 = \frac{n\eta^6}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} [\hat{\delta}_{33}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22}(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)].$$

em que  $\hat{k}_2$  e  $\hat{k}_3$  são estimadores dos LCs  $\hat{k}_2$ ,  $\hat{k}_3$ , respectivamente; e  $\hat{\delta}_{22}$ ,  $\hat{\delta}_{23}$ ,  $\hat{\delta}_{33}$  são os estimadores para  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{33}$ .

## 3.8 Aplicações e experimentos numéricos

### 3.8.1 Aplicações

Para aplicações, utilizaremos quatro conjuntos de dados e analisaremos qual submodelo da classe NT-G se ajusta ao conjunto de dados em estudo.

- (i) Fadiga (FA): O estudo consiste em uma amostra de fio de polyster de 100 cm com nível de deformação de 2,3% para analisar os testes das características de fadiga de tração (QUESENBERRY; KENT, 1982; ARYAL; TSOKOS, 2011).
- (ii) Fibras de Carbono (FC): O estudo consiste em 100 observações sobre o estresse de ruptura de fibras de carbono (em Gba) (MAHMOUD; MANDOUH, 2013).
- (iii) Dados aerotransportados (DA): dados relacionados ao tempo de reparo em horas para um transceptor de comunicação aerotransportado (JORGENSEN, 2012; ALVEN et al., 1964).

- (iv) Dados de Rastreamento (DR): Tempos de falha e tempos de execução para uma amostra de dispositivos de um estudo de rastreamento de campo de um sistema maior (MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2022).

Tabela 11 – Estatística Descritiva dos Dados para Classe NT-G

Dados	Min.	Média	Mediana	Moda	DP	Ass.	Curt.	Máx.	CV (%)	$n$	$\hat{k}_2$	$\hat{k}_3$
FA	15.0	221.5	195.5	180/264	144.51	1.35	2.78	829.0	65.24	100	0.58	-0.41
FC	0.920	1.656	1.544	1.501	0.5968	3.1531	14.2428	5.306	36.04	100	0.07	0.02
DA	0.20	3.64	1.75	0.5/1.5	5,07	2,91	11,67	24,5	139,34	46	0.07	0.02
DR	2.00	177.06	196.50	300	114.99	-0.28	1.45	300	64.95	30	0.07	0.02

A estatística descritiva dos quatro bancos de dados está resumida na Tabela 11<sup>1</sup>. Note que os conjuntos de dados FA, FC e DA possuem assimetria (Ass) positiva, pois a média é maior que a mediana. Além disso, o conjunto de dados FA é bimodal, apresentando a maior dispersão, enquanto que FC e DR são unimodais. Os dados FC e DA possuem uma medida de curtose (Curt) alta enquanto os dados FA e DR possuem uma pequena medida de curtose. Por fim, temos que todos os conjuntos de dados são heterogêneos, uma vez que, apresentam os valores do coeficiente de variação (CV) acima de 30, indicando que estão dispersos em torno da média.

A Figura 9, exibe os diagramas em 2D e 3D, sendo uma ferramenta de bondade de ajuste com aspecto qualitativo. Para a aplicação dos dados nos diagramas, calculamos os LCs amostrais (Equação 3.38) e utilizando bootstrap com 10.000 réplicas e tamanhos de amostra de 90%. Para o diagrama de LCs em 2D, calculamos apenas  $\hat{k}_3$  e  $\hat{k}_2$ . De forma análoga, para o diagrama de LCs em 3D, adicionamos  $\hat{k}_4$  que são os LCs amostrais que ditam a terceira dimensão, ou seja, a "altura" dos dados.

<sup>1</sup>  $n$  indica tamanho da amostra

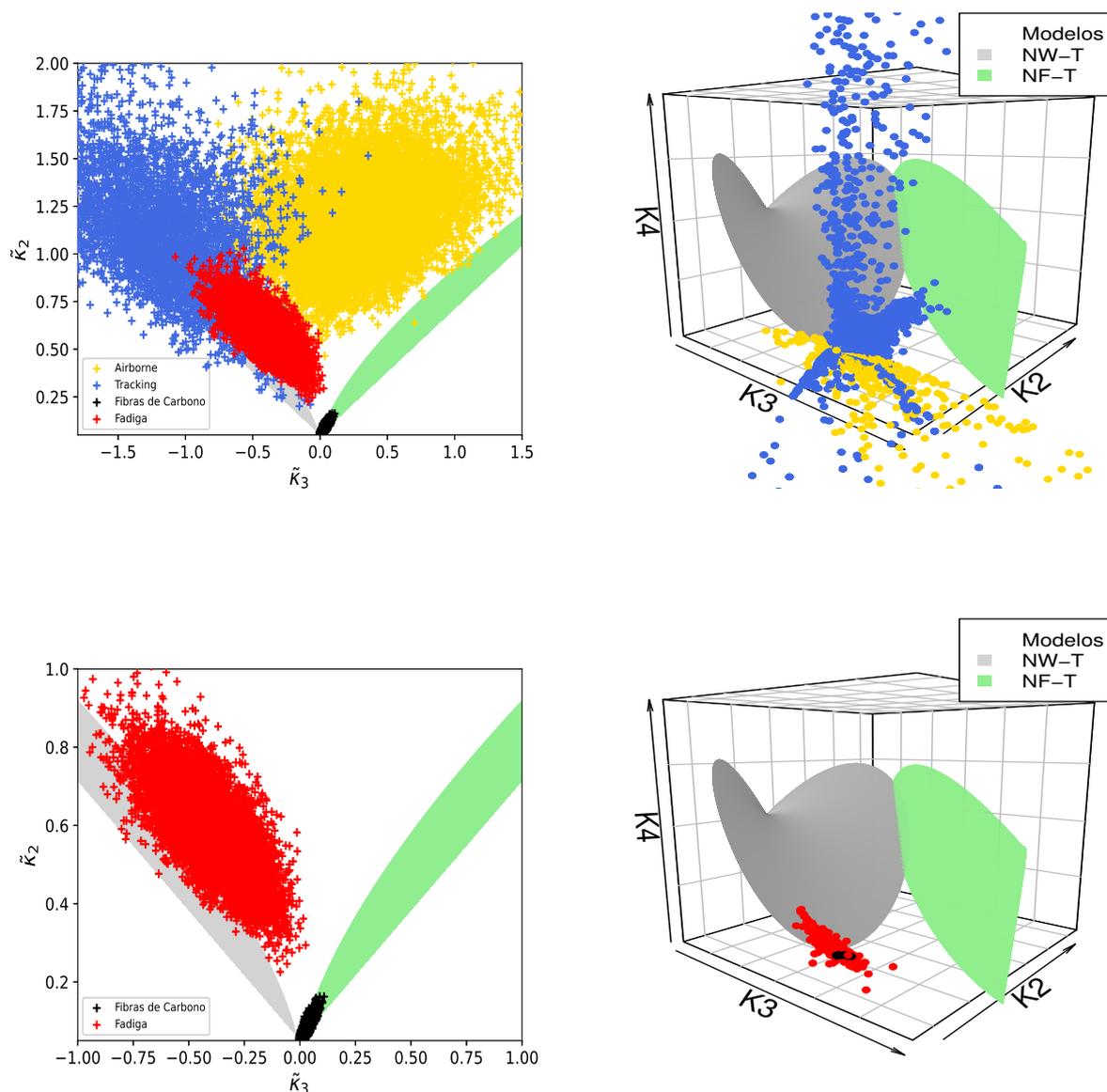


Figura 9 – Aplicação dos bancos de dados FA, FC, DA e DR.

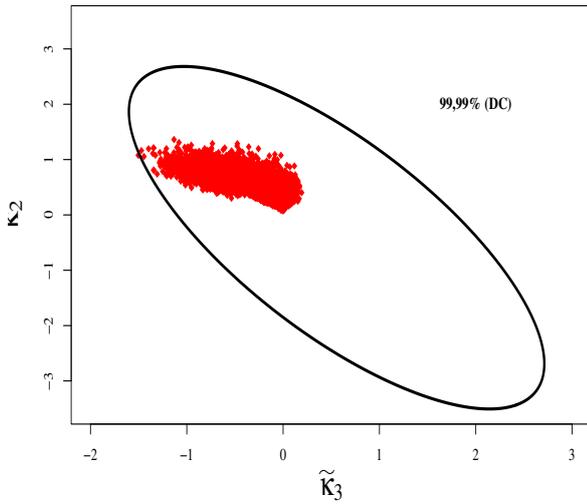
Agora que temos uma análise inicial que nos mostra qual distribuição consegue modelar os dados propostos, precisamos constatar numericamente, através da estatística de teste, que é nossa medida de bondade de ajuste qualitativa.

Tabela 12 – Estatística  $T^2$  de Hotelling e p-valor para Classe NT-G

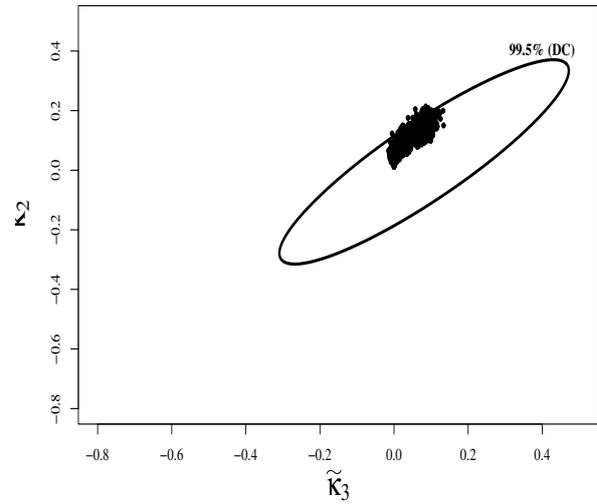
Data	Método dos log-cumulantes			
	NTW		NTF	
	$T^2$	$p$ -valor	$T^2$	$p$ -valor
FA	<b>0.2329</b>	<b>0.9726</b>	2.1197	0.5589
FC	9.6834	0.0279	<b>0.1176</b>	<b>0.9899</b>
DA	6.3732	0.1239	13.1500	0.0110
DR	<b>0.3471</b>	<b>0.9548</b>	13.0709	0.0168

De acordo com os valores da estatística  $T^2$  de Hotelling na Tabela (12), temos que a distribuição NTW é um bom modelo para os conjuntos de dados FA e DR. Por outro lado, o modelo NTF obteve melhor resultado para o banco de dados FC. Esses dados quantitativos confirmam a análise qualitativa fornecida na Figura (9). É possível observar que os bancos de dados que não possuem pontos (ou possui poucos pontos) sobre a região do modelo nos diagramas  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  e  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2, \tilde{k}_4)$  admitem valores da estatística  $T^2$  maiores que dez, ou seja, o modelo não é indicado para este conjunto de dados.

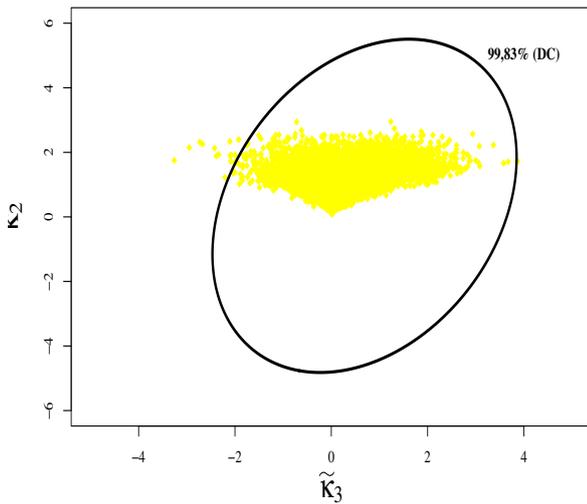
Para complementar a análise anterior, traçamos as elipses de confiança para cada conjunto de dados. A construção das elipses foi baseada em (3.47). Empregamos o menor valor da estatística  $T^2$  - Tabela (12) - à distribuição NT-G associada, usando os LCs estimados  $\hat{k}_2$  e  $\hat{k}_3$  e a matriz de covariância da amostra  $\hat{\Sigma}$ .



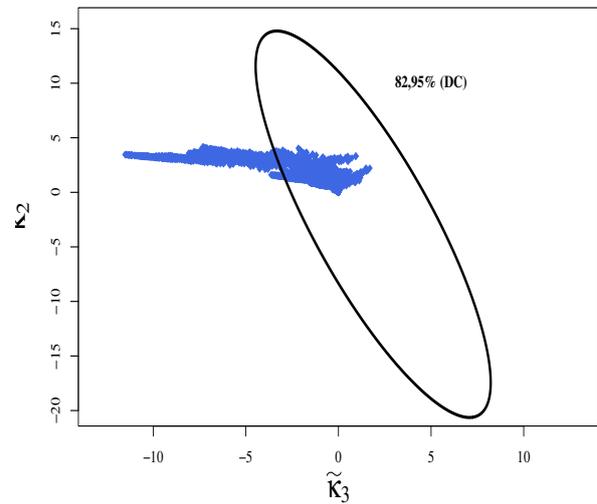
((a)) Elipse de confiança NTW - FA (♦).



((b)) Elipse de confiança NTF - FC (●).



((c)) Elipse de confiança NTW - DA (♦).



((d)) Elipse de confiança NTW - DR (♦).

Figura 10 – Elipses de Confiança

### 3.9 Conclusão

No Capítulo 3, apresentamos algumas propriedades matemáticas sobre medidas de informação referente a uma extensão da classe Transmutada-G, definida como Nova Transmutada-G (NT-G). Foram obtidas a entropia de Shannon, informação de Fisher e a diferença média de Gini das distribuições do gerador NT-G, assim como a divergência qui-quadrado e a divergência Kullback-Leibler entre a distribuição geral da classe e as funções densidades de seus componentes. Como grande

resultado deste trabalho, demonstramos que as expressões para a transformada de Mellin da classe NT-G podem ser obtidas a partir dos Momentos ponderados de probabilidade da distribuição-base. Além disso, utilizando os diagramas de Log-cumulantes 2D e 3D, juntamente com a estatística  $T^2$  de Hotelling, foram desenvolvidas novas medidas de bondade de ajuste para probabilidade de modelos gerados a partir da classe NT-G. Experimentos com banco de dados reais foram utilizados para ilustrar que o método de log-cumulantes desempenha um bom comportamento para as medidas de bondade de ajuste.

## 4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos algumas considerações finais e orientações para a próxima etapa do trabalho.

### 4.1 Considerações finais

Neste trabalho, mostramos que as estatísticas do tipo Mellin podem ser aplicadas com sucesso como medidas de bondade de ajuste para famílias transmutadas generalizadas no contexto de análise de sobrevivência e imagens SAR. Fornecemos análises qualitativas e quantitativas para as ferramentas de bondade de ajuste, incluindo uma abordagem de inspeção numérica e visual. Obtemos expressões de forma fechada para a função característica de segundo tipo dos modelos TW, TF, TLL, TP, NTW e NTF, além da construção de diagramas de Log-cumulantes 2D (e 3D para a classe NT-G). Nossas propostas foram ilustradas por meio de cinco conjuntos de dados reais, no âmbito da classe T-G, e quatro bases de dados, no âmbito da classe NT-G, a fim de demonstrar a sua aplicabilidade.

Além disso, foi apresentado um teorema que calcula a transformada de Mellin para qualquer modelo das classes T-G e NT-G, em função dos MPP da distribuição-base. Este resultado é bastante relevante, pois simplifica os cálculos para obtenção da primeira função característica de segundo tipo. Foi também realizada uma simulação de Monte Carlo para a classe transmutada-G afim de comparar o método de estimação proposto com o método de estimação já consolidado, baseado na máxima verossimilhança, no qual foi observado que o método proposto obteve melhor resultado.

Por fim, apresentamos algumas propriedades matemáticas sobre medidas de informação referente a uma extensão da classe T-G, definida como NT-G. Foram obtidas a entropia de Shannon, informação de Fisher e a diferença média de Gini das distribuições do gerador NT-G, assim como a divergência qui-quadrado e a divergência Kullback-Leibler entre a distribuição geral da classe e as funções densidades de seus componentes.

Como futuros trabalhos pretendemos estudar as medidas de informação, além das medidas de bondade de ajuste baseada na transformada de Mellin, de uma generalização da classe T-G proposta por [Badr et al. \(2020\)](#), cujas fda e fdp são definidas, respectivamente, por

$$F(x) = F(x; \lambda, a, b, \phi) = G(x; \phi)^a [(1 + \lambda) - \lambda G(x; \phi)^b], \quad (4.1)$$

e

$$f(x; \lambda, a, b, \phi) = g(x; \phi)G(x; \phi)^{a-1}[a(1 + \lambda) - \lambda(a + b)G(x; \phi)^b]. \quad (4.2)$$

Esta nova família transmutada generaliza a classe T-G (basta fazer  $a = b = 1$ ) e a classe NT-G (basta fazer  $a = 1$  e  $b = \alpha - 1$ ).

# Referências Bibliográficas

- AHMAD, Z. A new generalized class of distributions: properties and estimation based on type-i censored samples. **Annals of Data Science**, Springer, v. 7, n. 2, p. 243–256, 2020.
- ALMARASHI, A. M. et al. Statistical inference of the half-logistic inverse rayleigh distribution. **Entropy**, MDPI, v. 22, n. 4, p. 449, 2020.
- ALVEN, W. H. V. et al. Reliability engineering. (**No Title**), 1964.
- ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis**. [S.l.], 1958.
- ANDREEV, A.; KANTO, A.; MALO, P. Computational examples of a new method for distribution selection in the pearson system. **Journal of applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 487–506, 2007.
- ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Goodness-of-fit tests for multilook polarimetric radar data based on the mellin transform. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, IEEE, v. 49, n. 7, p. 2764–2781, 2011.
- ANFINSEN, S. N.; ELTOFT, T. Application of the matrix-variate mellin transform to analysis of polarimetric radar images. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, IEEE, v. 49, n. 6, p. 2281–2295, 2011.
- ARYAL, G. R.; TSOKOS, C. P. On the transmuted extreme value distribution with application. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 71, n. 12, p. e1401–e1407, 2009.
- ARYAL, G. R.; TSOKOS, C. P. Transmuted weibull distribution: A generalization of the weibull probability distribution. **European Journal of pure and applied mathematics**, v. 4, n. 2, p. 89–102, 2011.
- ASADI, M. et al. Mixture models, bayes fisher information, and divergence measures. **IEEE Transactions on Information Theory**, IEEE, v. 65, n. 4, p. 2316–2321, 2018.
- BADR, M. M. et al. The transmuted odd fréchet-g family of distributions: Theory and applications. **Mathematics**, MDPI, v. 8, n. 6, p. 958, 2020.
- BALAKRISHNAN, N.; HE, M. A record-based transmuted family of distributions. **Advances in Statistics-Theory and Applications: Honoring the Contributions of Barry C. Arnold in Statistical Science**, Springer, p. 3–24, 2021.
- BILLINGSLEY, P. **Probability and measure**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- BILODEAU, M.; BRENNER, D. **Theory of multivariate statistics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.

- BOMBRUN, L.; BEAULIEU, J.-M. Fisher distribution for texture modeling of polarimetric sar data. **IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters**, IEEE, v. 5, n. 3, p. 512–516, 2008.
- BOURGUIGNON, M.; SILVA, R. B.; CORDEIRO, G. M. The weibull-g family of probability distributions. **Journal of data science**, v. 12, n. 1, p. 53–68, 2014.
- BRITO, C. R. D. et al. Method for generating distributions and classes of probability distributions: the univariate case. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, Hacettepe University, v. 48, n. 3, p. 897 – 930, 2019. ISSN 2651-477X.
- CHU, J.; DICKIN, O.; NADARAJAH, S. A review of goodness of fit tests for pareto distributions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 361, p. 13–41, 2019.
- COLOMBO, S. **Les transformations de Mellin, et de Hankel: applications à la physique mathématique**. [S.l.]: Centre national de la recherche scientifique, 1959. v. 2.
- CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949650903530745>>.
- CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. **Journal of statistical computation and simulation**, Taylor & Francis, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011.
- CORDEIRO, G. M. et al. The transmuted generalized modified weibull distribution. **Filomat**, JSTOR, v. 31, n. 5, p. 1395–1412, 2017.
- DELIGNON, Y.; GARELLO, R.; HILLION, A. Statistical modelling of ocean sar images. **IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation**, IET, v. 144, n. 6, p. 348–354, 1997.
- DENG, X.; LÓPEZ-MARTÍNEZ, C. Higher order statistics for texture analysis and physical interpretation of polarimetric sar data. **IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters**, IEEE, v. 13, n. 7, p. 912–916, 2016.
- DEY, S. et al. A review of transmuted distributions. **Journal of the Indian Society for Probability and Statistics**, Springer, v. 22, p. 47–111, 2021.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 31, n. 4, p. 497–512, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1081/STA-120003130>>.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics-Theory and methods**, Taylor & Francis, v. 31, n. 4, p. 497–512, 2002.
- FISHER, R. A. Tests of significance in harmonic analysis. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 125, n. 796, p. 54–59, 1929.
- GHOSH, D. I.; CORDEIRO, G.; BOURGUIGNON, M. General results for the transmuted family of distributions and new models. **Journal of Probability and Statistics**, v. 2016, 01 2016.

- GINI, C. Variabilitae mutabilita. reprinted in memorie di metodologica statistica. **Rome: Libreria Eredi Virgilio Veschi**, v. 1, 1912.
- GRANZOTTO, D. C. T.; LOUZADA, F. The transmuted log-logistic distribution: modeling, inference, and an application to a polled tabapua race time up to first calving data. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 44, n. 16, p. 3387–3402, 2015.
- GREENWOOD, J. A. et al. Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. **Water resources research**, Wiley Online Library, v. 15, n. 5, p. 1049–1054, 1979.
- HUSSAIN, T.; BAKOUCH, H. S.; IQBAL, Z. A new probability model for hydrologic events: properties and applications. **Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics**, Springer, v. 23, n. 1, p. 63–82, 2018.
- JENKINS, S. P. Survival analysis. **Unpublished manuscript, Institute for Social and Economic Research, University of Essex, Colchester, UK**, v. 42, p. 54–56, 2005.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. et al. Applied multivariate statistical analysis. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- JORGENSEN, B. **Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 9.
- KELLER, A.; KAMATH, A.; PERERA, U. Reliability analysis of cnc machine tools. **Reliability engineering**, Elsevier, v. 3, n. 6, p. 449–473, 1982.
- KHARAZMI, O.; BALAKRISHNAN, N. Informational properties of transmuted distributions. **Filomat**, v. 35, n. 13, p. 4287–4303, 2021.
- KOZUBOWSKI, T. J.; PODGÓRSKI, K. Transmuted distributions and random extrema. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 116, p. 6–8, 2016.
- KULLBACK, S.; LEIBLER, R. A. On information and sufficiency. **The annals of mathematical statistics**, JSTOR, v. 22, n. 1, p. 79–86, 1951.
- LAI, C.-D. Generalized weibull distributions. In: **Generalized Weibull Distributions**. [S.l.]: Springer, 2014. p. 23–75.
- LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. **Theory of point estimation**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- MAHMOUD, M.; MANDOUH, R. On the transmuted fréchet distribution. **Journal of Applied Sciences Research**, v. 9, n. 10, p. 5553–5561, 2013.
- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997.
- MARTÍNEZ-FLÓREZ, G.; PACHECO-LÓPEZ, M.; TOVAR-FALÓN, R. Likelihood-based inference for the asymmetric exponentiated bimodal normal model. **Revista Colombiana de Estadística**, Universidad Nacional de Colombia., v. 45, n. 2, p. 301–326, 2022.

- MCKELLAR, R.; LU, X.; DELAQUIS, P. A probability model describing the interface between survival and death of escherichia coli o157: H7 in a mayonnaise model system. **Food microbiology**, Elsevier, v. 19, n. 2-3, p. 235–247, 2002.
- MCQUARRIE, A. D.; TSAI, C.-L. **Regression and time series model selection**. [S.l.]: World Scientific, 1998.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A.; PASCUAL, F. G. **Statistical methods for reliability data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2022.
- MEHRALI, Y.; ASADI, M.; KHARAZMI, O. A jensen–gini measure of divergence with application in parameter estimation. **Metron**, Springer, v. 76, n. 1, p. 115–131, 2018.
- MEROVCI, F.; PUKA, L. Transmuted pareto distribution. In: **ProbStat Forum**. [S.l.: s.n.], 2014. v. 7, n. 1, p. 1–11.
- NACHLAS, J. A. **Reliability engineering: probabilistic models and maintenance methods**. [S.l.]: CRC press, 2017.
- NASCIMENTO, A. D. et al. The gamma extended weibull family of distributions. **Journal of Statistical Theory and Applications**, v. 13, p. 1–16, 2014. ISSN 2214-1766. Disponível em: <https://doi.org/10.2991/jsta.2014.13.1.1>.
- NASCIMENTO, A. D. C. d. Teoria estatística da informação para dados de radar de abertura sintética univariados e polarimétricos. Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- NICOLAS, J.-M. Application de la transformée de mellin: étude des lois statistiques de l’imagerie cohérente version corrigée, janvier 2017. 2005.
- NICOLAS, J.-M.; ANFINSEN, S. N. Introduction to second kind statistics: Application of log-moments and log-cumulants to the analysis of radar image distributions. **Traitement du Signal**, Citeseer, v. 19, n. 3, p. 139–167, 2002.
- NIELSEN, F.; NOCK, R. On the chi square and higher-order chi distances for approximating f-divergences. **IEEE Signal Processing Letters**, IEEE, v. 21, n. 1, p. 10–13, 2013.
- NOFAL, Z. M. et al. The generalized transmuted-g family of distributions. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 46, n. 8, p. 4119–4136, 2017.
- OROZCO VASCONCELOS, G.-S. D. L. R. Inferential results based on mellin-type statistics for the transmuted inverse weibull distribution. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia, 2023.
- PAKYARI, R.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test for progressively type-ii censored data. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 61, n. 1, p. 238–244, 2012.
- PEARSON, K. X. contributions to the mathematical theory of evolution.—ii. skew variation in homogeneous material. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)**, The Royal Society London, n. 186, p. 343–414, 1895.

- PENA-RAMIREZ, F. A. et al. The exponentiated power generalized weibull: Properties and applications. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, SciELO Brasil, v. 90, p. 2553–2577, 2018.
- QUESENBERRY, C.; KENT, J. Selecting among probability distributions used in reliability. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 24, n. 1, p. 59–65, 1982.
- RAHMAN, M. M. et al. Transmuted probability distributions: a review. **Pakistan Journal of Statistics and Operation Research**, College of Statistical and Actuarial Sciences, p. 83–94, 2020.
- SAHA, S.; KAYAL, S.; BALAKRISHNAN, N. Different informational characteristics of cubic transmuted distributions. **arXiv preprint arXiv:2207.13442**, 2022.
- SÁNCHEZ-MORENO, P.; ZARZO, A.; DEHESA, J. S. Jensen divergence based on fisher's information. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 45, n. 12, p. 125305, 2012.
- SARABIA, J. M.; RAJA, A. V.; ASHA, G. Bivariate distributions with transmuted conditionals: Models and applications. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 49, n. 1, p. 221–242, 2020.
- SEBER, G. A. **A matrix handbook for statisticians**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell system technical journal**, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- SHAW, W.; BUCKLEY, I. The alchemy of probability distributions: beyond gram-charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. p. 39, 02 2009.
- SHAW, W. T.; BUCKLEY, I. The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier & cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions. **Submitted, Feb**, v. 7, p. 64, 2007.
- SILVEIRA, F. et al. Modelling wind speed with a univariate probability distribution depending on two baseline functions. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, Hacettepe University, p. 1–20, 2023.
- TAHIR, M. H.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established g families. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, SciELO Brasil, v. 87, p. 539–568, 2015.
- TANIŞ, C. Transmuted lower record type inverse rayleigh distribution: estimation, characterizations and applications. **Ricerche di Matematica**, Springer, v. 71, n. 2, p. 777–802, 2022.
- VASCONCELOS, J. M.; CINTRA, R. J.; NASCIMENTO, A. D. Goodness-of-fit measures based on the mellin transform for beta generalized lifetime data. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley Online Library, v. 44, n. 18, p. 14823–14848, 2021.
- VASCONCELOS, J. M. et al. The compound truncated poisson cauchy model: A descriptor for multimodal data. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 378, p. 112887, 2020.

VASCONCELOS, J. M. d. Essays on new models and the mellin transform: experiments in survival and radar data. Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

VOGEL, R. M.; FENNESSEY, N. M. L moment diagrams should replace product moment diagrams. **Water resources research**, Wiley Online Library, v. 29, n. 6, p. 1745–1752, 1993.

YITZHAKI, S. Stochastic dominance, mean variance, and gini's mean difference. **The American Economic Review**, JSTOR, v. 72, n. 1, p. 178–185, 1982.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. **Statistical methodology**, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 344–362, 2009.

## Apêndices

# APÊNDICE A – Estimação dos parâmetros por MLE

## A.1 Modelo TW

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição TW ( $X \sim \text{TW}(x; \eta, \sigma, \lambda)$ ). A função verossimilhança é dada por:

$$L(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\eta}{\sigma} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^{\eta-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right\} \right) \left( 1 - \lambda + 2\lambda \exp \left\{ - \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right\} \right), \quad (\text{A.1})$$

em que  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  são os valores observados da amostra aleatória.

Para estimar os parâmetros, deseja-se obter o conjunto de valores  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximiza (A.1). A função log-verossimilhança associada é

$$\begin{aligned} l(\eta, \sigma, \lambda; x_i) &= n \ln \left( \frac{\eta}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta + \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^{\eta-1} + \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 - \lambda + 2\lambda \exp \left( - \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right] \\ &= n \ln(\eta) - n \ln(\sigma) + (\eta - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta + \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 - \lambda + 2\lambda \exp \left( - \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right]. \end{aligned}$$

Portanto, os MLEs de  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximizam (A.1) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right] \ln \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) - 2\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i/\sigma)(x_i/\sigma)^\eta \exp(-x_i/\sigma)^\eta}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-x_i/\sigma)^\eta]} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{x_i}{\sigma} \right)^\eta \right] + \frac{2\lambda \eta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i/\sigma)^\eta \exp(-x_i/\sigma)^\eta}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-x_i/\sigma)^\eta]} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{2 \exp(-x_i/\sigma)^\eta - 1}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-x_i/\sigma)^\eta]} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta} = (\hat{\eta}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})^T$  de  $\theta = (\eta, \sigma, \lambda)^T$  é obtido resolvendo o sistema de equações não lineares (A.2). Faz necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas. Utilizamos o método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e o pacote BB no software R para encontrar a estimação dos parâmetros.

## A.2 Modelo TF

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição TF ( $X \sim \text{TF}(x; \eta, \sigma, \lambda)$ ). A função verossimilhança é dada por:

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^{\eta+1} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\eta\right\} \left[1 + \lambda - 2\lambda \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\eta\right\}\right], \quad (\text{A.3})$$

em que  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  são os valores observados da amostra aleatória.

Para estimar os parâmetros, deseja-se obter o conjunto de valores  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximiza (A.3). A função log-verossimilhança associada é

$$l(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = n \ln(\eta) - n \ln(\sigma) + (\eta + 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\sigma}{x_i}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\eta + \sum_{i=1}^n \ln\left[1 + \lambda - 2\lambda \exp\left(-\frac{\sigma}{x_i}\right)^\eta\right] \quad (\text{A.4})$$

Portanto, os MLEs de  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximizam (A.3) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} - \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\sigma}{x_i}\right)^\eta\right] \ln\left(\frac{\sigma}{x_i}\right) - 2\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\ln(\sigma/x_i)(\sigma/x_i)^\eta \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)]} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) \left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^\eta\right] + (\eta + 1) \frac{n}{\sigma} + \frac{2\lambda\eta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{(\sigma/x_i)^\eta \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)]} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - 2 \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)}{[1 - \lambda + 2\lambda \exp(-(\sigma/x_i)^\eta)]} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\eta}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})^T$  de  $\boldsymbol{\theta} = (\eta, \sigma, \lambda)^T$  é obtido resolvendo o sistema de equações não lineares (A.5). Faz necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas. Utilizamos o método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e o pacote BB no software R para encontrar a estimação dos parâmetros.

### A.3 Modelo TLL

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição TLL ( $X \sim \text{TLL}(x; \eta, \sigma, \lambda)$ ). A função verossimilhança é dada por:

$$L(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = e^{n\sigma} \beta^n \prod_{i=1}^n \left\{ x_i^{\eta-1} \left[ \frac{(1 + e^\sigma x_i^\eta) - \lambda (e^\sigma x_i^\eta - 1)}{(1 + e^\sigma x_i^\eta)^3} \right] \right\} \quad (\text{A.6})$$

em que  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  são os valores observados da amostra aleatória.

Para estimar os parâmetros, deseja-se obter o conjunto de valores  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximiza (A.6). A função log-verossimilhança associada é

$$l(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = n\sigma - n \ln(\eta) + (\eta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^\sigma x_i^\eta - \lambda e^\sigma x_i^\eta + \lambda) - 3 \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^\sigma x_i^\eta). \quad (\text{A.7})$$

Portanto, os MLEs de  $\eta$ ,  $\sigma$  e  $\lambda$  que maximizam (A.6) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{e^\sigma x_i^\eta \ln x_i - \lambda e^\sigma x_i^\eta \ln x_i}{1 + e^\sigma x_i^\eta - \lambda e^\sigma x_i^\eta + \lambda} \right] - 3\lambda \sum_{i=1}^n \left( \frac{e^\sigma x_i^\eta \ln x_i}{1 + e^\sigma x_i^\eta} \right) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} = n + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{e^\sigma x_i^\eta - \lambda e^\sigma x_i^\eta}{1 + e^\sigma x_i^\eta - \lambda e^\sigma x_i^\eta + \lambda} \right] - 3\lambda \sum_{i=1}^n \left( \frac{e^\sigma x_i^\eta}{1 + e^\sigma x_i^\eta} \right) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1 - e^\sigma x_i^\eta}{1 + e^\sigma x_i^\eta - \lambda e^\sigma x_i^\eta + \lambda} \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\eta}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})^T$  de  $\boldsymbol{\theta} = (\eta, \sigma, \lambda)^T$  é obtido resolvendo o sistema de equações não lineares (A.8). Faz necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas. Utilizamos o método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e o pacote BB no software R para encontrar a estimação dos parâmetros.

## A.4 Modelo TP

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição TP ( $X \sim \text{TP}(x; \eta, \sigma, \lambda)$ ). A função verossimilhança é dada por:

$$L(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = L = \frac{\eta^n \sigma^{\eta n}}{\prod_{i=1}^n x_i^{\eta+1}} \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \lambda + 2\lambda \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta \right] \quad (\text{A.9})$$

em que  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  são os valores observados da amostra aleatória.

Para estimar os parâmetros, deseja-se obter o conjunto de valores  $\eta, \sigma$  e  $\lambda$  que maximiza (A.9). A função log-verossimilhança associada é

$$l(\eta, \sigma, \lambda; x_i) = n \ln(\eta) + n\eta \ln(\sigma) - (\eta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left[ 1 - \lambda + 2\lambda \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta \right]. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, os MLEs de  $\eta$ ,  $\sigma$  e  $\lambda$  que maximizam (A.9) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2\lambda \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta \ln \left( \frac{\sigma}{x} \right)}{1 - \lambda + 2\lambda \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta} \right] = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2 \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta - 1}{1 - \lambda + 2\lambda \left( \frac{\sigma}{x} \right)^\eta} \right] = 0. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\eta}, \hat{\lambda})^T$  de  $\boldsymbol{\theta} = (\eta, \lambda)^T$  é obtido resolvendo o sistema de equações não lineares (A.11). Faz necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas. Utilizamos o método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e o pacote BB no software R para encontrar a estimação dos parâmetros.

# APÊNDICE B – Demonstrações

Neste Apendice, fornecemos a demonstração do segundo item da Proposição 2.7.1 e da Proposição 2.10.1.

## B.1 Prova da Proposição 2.7.1

*Demonstração.* Prova por indução simples em  $v$ .

**Base:** para  $v = 2$ , temos

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= \frac{(2-1)!}{[2\sigma]^2} [2^2 + 1 - (1+\lambda)^2] \\ \tilde{k}_2 &= \frac{1}{(2\sigma)^2} [5 - (1+\lambda)^2]\end{aligned}\tag{B.1}$$

**Hipótese:**  $\tilde{k}_v = \frac{(v-1)!}{[2\sigma]^v} [2^v + 1 - (1+\lambda)^v]$ .

**Passo:** Segue de (2.17), (??) e Tabela (3) que

$$\frac{d^v \varphi_X(s)}{ds^v} = -\frac{(v-1)!(1+\lambda)^v}{[2\sigma - (s-1)(1+\lambda)]^v} + \frac{(v-1)!}{[\sigma - s + 1]^v} + \frac{(v-1)!}{[2\sigma - s + 1]^v}.$$

Derivando em relação a  $s$ , obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{d^{v+1} \varphi_X(s)}{ds^{v+1}} &= -\frac{v \cdot (v-1)!(1+\lambda)^{v+1}}{[2\sigma - (s-1)(1+\lambda)]^{v+1}} + \frac{v \cdot (v-1)!}{[\sigma - s + 1]^{v+1}} + \frac{v(v-1)!}{[2\sigma - s + 1]^{v+1}} \\ &= -\frac{v!(1+\lambda)^{v+1}}{[2\sigma - (s-1)(1+\lambda)]^{v+1}} + \frac{v!}{[\sigma - s + 1]^{v+1}} + \frac{v!}{[2\sigma - s + 1]^{v+1}}.\end{aligned}$$

Aplicando  $s = 1$ , ao passo de indução, segue o resultado

$$\tilde{k}_{v+1} = -\frac{v!(1+\lambda)^{v+1}}{[2\sigma]^{v+1}} + \frac{v!}{[\sigma]^{v+1}} + \frac{v!}{[2\sigma]^{v+1}} = \frac{v!}{[2\sigma]^{v+1}} [2^{v+1} + 1 - (1+\lambda)^{v+1}].$$

□

## B.2 Prova da Proposição 2.10.1

### B.2.1 Modelo TW

*Demonstração.* As expressões para os elementos da matriz assintótica dos LCs estimados estão apresentados abaixo:

$$K_3 = J_3^T \cdot M_3 \cdot J_3$$

com a matriz jacobiana das transformações de momentos para cumulantes dada por

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2m_1 & 1 & 0 \\ -3(m_2 - 2m_1^2) & -3m_1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{13} \\ \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

em que

$$M_{13} = \tilde{k}_4 + 3\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2 + 3\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2$$

$$M_{22} = \tilde{k}_4 + 4\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_2 + 4\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2$$

$$M_{23} = \tilde{k}_5 + 5\tilde{k}_1\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_1^2\tilde{k}_3 + 12\tilde{k}_1\tilde{k}_2^2 + 6\tilde{k}_1^3\tilde{k}_2$$

$$M_{33} = \tilde{k}_6 + 6\tilde{k}_1\tilde{k}_5 + 15\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 15\tilde{k}_1^2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 54\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_1^3\tilde{k}_3 + 15\tilde{k}_2^3 + 36\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2^2 + 9\tilde{k}_1^4\tilde{k}_2$$

Portanto,

$$K_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \\ \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Com base na matriz  $K_3$ , calcula-se a matriz de covariância assintótica  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2}_{k_{22}} & \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{23}} \\ \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{32}} & \underbrace{\tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3 + 6\tilde{k}_2^3}_{k_{33}} \end{bmatrix}$$

em que:

$$\begin{aligned}
k_{22} &= \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 = \frac{1}{\eta^4} [\psi^{(3)}(1) + [\log(2)]^4(1-\lambda)\lambda[6\lambda(\lambda-1)+1] + 2 \left( \frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] \right)^2 \\
k_{23} &= \frac{1}{\eta^5} [\psi^{(4)}(1) - [\log(2)]^5(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)[12\lambda(\lambda-1)+1]] \\
&\quad + 6\frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] \frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) - [\log(2)]^3(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)] \\
k_{33} &= \frac{1}{\eta^6} [\psi^{(5)}(1) + [\log(2)]^6(1-\lambda)\lambda [30\lambda(\lambda-1)(1-2\lambda)^2 + 1]] \\
&\quad + 9\frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] \frac{1}{\eta^4} [\psi^{(3)}(1) + [\log(2)]^4(1-\lambda)\lambda[6\lambda(\lambda-1)+1]] \\
&\quad + 9 \left( \frac{1}{\eta^3} [\psi^{(2)}(1) - [\log(2)]^3(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)] \right)^2 + 6 \left( \frac{1}{\eta^2} [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] \right)^3
\end{aligned}$$

Daí,

$$K = \frac{1}{\eta^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\delta_{22} &= \eta^2 \left[ \psi^{(3)}(1) + [\log(2)]^4(1-\lambda)\lambda[6\lambda(\lambda-1)+1] + 2 [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda]^2 \right] \\
\delta_{23} &= \eta \left[ \psi^{(4)}(1) - [\log(2)]^5(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)[12\lambda(\lambda-1)+1] \right] \\
&\quad + 6\eta [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] [\psi^{(2)}(1) - [\log(2)]^3(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)] \\
\delta_{33} &= \psi^{(5)}(1) + [\log(2)]^6(1-\lambda)\lambda [30\lambda(\lambda-1)(1-2\lambda)^2 + 1] \\
&\quad + 9 [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda] [\psi^{(3)}(1) + [\log(2)]^4(1-\lambda)\lambda[6\lambda(\lambda-1)+1]] \\
&\quad + 9 [\psi^{(2)}(1) - [\log(2)]^3(1-\lambda)\lambda(1-2\lambda)]^2 + 6 [\psi^{(1)}(1) + [\log(2)]^2(1-\lambda)\lambda]^3
\end{aligned}$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{\eta^6}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a estatística de Hotteling é dada por:

$$T_{T-LL}^2 = n \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T K^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\eta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\eta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 & \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\eta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \left[ \widehat{\delta}_{33} \left( \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \right)^2 + \widehat{\delta}_{22} \left( \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \right)^2 - 2\widehat{\delta}_{23} \left( \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \right) \left( \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \right) \right]$$

□

## B.2.2 Modelo TF

*Demonstração.* As expressões para os elementos da matriz assintótica dos LCs estimados estão apresentados abaixo:

$$K_3 = J_3^T \cdot M_3 \cdot J_3$$

com a matriz jacobiana das transformações de momentos para cumulantes dada por

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2m & 1 & 0 \\ -3(m_2 - 2m_1^2) & -3m_1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_3 = \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 & \widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2 & M_{13} \\ \widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

em que

$$M_{13} = \widetilde{k}_4 + 3\widetilde{k}_1\widetilde{k}_3 + 3\widetilde{k}_2 + 3\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2$$

$$M_{22} = \widetilde{k}_4 + 4\widetilde{k}_1\widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_2 + 4\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2$$

$$M_{23} = \widetilde{k}_5 + 5\widetilde{k}_1\widetilde{k}_4 + 9\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3 + 9\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_3 + 12\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2^2 + 6\widetilde{k}_1^3\widetilde{k}_2$$

$$M_{33} = \widetilde{k}_6 + 6\widetilde{k}_1\widetilde{k}_5 + 15\widetilde{k}_2\widetilde{k}_4 + 15\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_4 + 9\widetilde{k}_3^2 + 54\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3 + 18\widetilde{k}_1^3\widetilde{k}_3 + 15\widetilde{k}_2^3 + 36\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2^2 + 9\widetilde{k}_1^4\widetilde{k}_2$$

Portanto,

$$K_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \\ \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Com base na matriz  $(K_3)$ , calcula-se a matriz de covariância assintótica  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2}_{k_{22}} & \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{23}} \\ \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{32}} & \underbrace{\tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3}_{k_{33}} \end{bmatrix}$$

em que:

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{1}{\mu^4} \left[ \psi^{(3)}(1) - [\log(2)]^4 \lambda(1 + \lambda)(6\lambda(\lambda + 1) + 1) \right] + 2 \left( \frac{1}{\mu^2} \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \right)^2 \\ k_{23} &= \frac{1}{\mu^5} \left[ \psi^{(4)}(1) + [\log(2)]^5 \lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1)(12\lambda^2 + 12\lambda + 1) \right] \\ &\quad + 6 \frac{1}{\mu^2} \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \frac{1}{\mu^3} \left[ \psi^{(2)}(1) + [\log(2)]^3 \lambda(1 + \lambda)(2\lambda + 1) \right] \\ k_{33} &= \frac{1}{\mu^6} \left[ \psi^{(5)}(1) - \lambda(\lambda + 1)(30\lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1)^2 + 1) \right] \\ &\quad + 9 \frac{1}{\mu^2} \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \frac{1}{\mu^4} \left[ \psi^{(3)}(1) - [\log(2)]^4 \lambda(1 + \lambda)(6\lambda(\lambda + 1) + 1) \right] \\ &\quad + 9 \left( \frac{1}{\mu^3} \left[ \psi^{(2)}(1) + [\log(2)]^3 \lambda(1 + \lambda)(2\lambda + 1) \right] \right)^2 + 6 \left( \frac{1}{\mu^2} \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \right)^3 \end{aligned}$$

Daí,

$$K = \frac{1}{\mu^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \mu^2 \left\{ \psi^{(3)}(1) - [\log(2)]^4 (1 + \lambda) \lambda [6\lambda(\lambda + 1) + 1] + 2 \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 (1 + \lambda) \lambda \right]^2 \right\} \\ \delta_{23} &= \mu \left[ \psi^{(4)}(1) + [\log(2)]^5 \lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1)(12\lambda^2 + 12\lambda + 1) \right] \\ &\quad + 6\mu \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \left[ \psi^{(2)}(1) + [\log(2)]^3 \lambda(1 + \lambda)(2\lambda + 1) \right] \\ \delta_{33} &= \psi^{(5)}(1) - \lambda(\lambda + 1)(30\lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1)^2 + 1) \\ &\quad + 9 \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right] \left[ \psi^{(3)}(1) - [\log(2)]^4 \lambda(1 + \lambda)(6\lambda(\lambda + 1) + 1) \right] \\ &\quad + 9 \left[ \psi^{(2)}(1) + [\log(2)]^3 \lambda(1 + \lambda)(2\lambda + 1) \right]^2 + 6 \left[ \psi^{(1)}(1) - [\log(2)]^2 \lambda(1 + \lambda) \right]^3 \end{aligned}$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{\mu^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a estatística de Hotelling é dada por:

$$T_{T-LL}^2 = n \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T K^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\mu^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\mu^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 & \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\mu^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \left[ \hat{\delta}_{33} \left( \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \right)^2 + \hat{\delta}_{22} \left( \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \right)^2 - 2\hat{\delta}_{23} \left( \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \right) \left( \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \right) \right]$$

□

### B.2.3 Modelo TLL

*Demonstração.* As expressões para os elementos da matriz assintótica dos LCs estimados estão apresentados abaixo:

$$K_3 = J_3^T \cdot M_3 \cdot J_3$$

com a matriz jacobiana das transformações de momentos para cumulantes dada por

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2m & 1 & 0 \\ -3(m_2 - 2m_1^2) & -3m_1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{13} \\ \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned}
M_{13} &= \tilde{k}_4 + 3\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2 + 3\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2 \\
M_{22} &= \tilde{k}_4 + 4\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_2 + 4\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2 \\
M_{23} &= \tilde{k}_5 + 5\tilde{k}_1\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_1^2\tilde{k}_3 + 12\tilde{k}_1\tilde{k}_2^2 + 6\tilde{k}_1^3\tilde{k}_2 \\
M_{33} &= \tilde{k}_6 + 6\tilde{k}_1\tilde{k}_5 + 15\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 15\tilde{k}_1^2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 54\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_1^3\tilde{k}_3 + 15\tilde{k}_2^3 + 36\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2^2 + 9\tilde{k}_1^4\tilde{k}_2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$K_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \\ \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Com base na matriz  $(K_3)$ , calcula-se matriz de covariância assintótica  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$K = \frac{1}{\theta^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\delta_{22} = \theta^2 \left[ 2\psi^{(3)}(1) - 6\lambda^4 + 2 \left[ 2\psi^{(1)}(1) - \lambda^2 \right]^2 \right]$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \theta \left[ -24\lambda^5 - 24\lambda^3\psi^{(1)}(1) + 12\lambda^5 \right]$$

$$\delta_{33} = 2\psi^{(5)}(1) - 120\lambda^6 + 9 \left( 2\psi^{(1)}(1) - \lambda^2 \right) \left( 2\psi^{(3)}(1) - 6\lambda^4 \right) + 36\lambda^6 + 6 \left[ 2\psi^{(1)}(1) - \lambda^2 \right]^3$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{\theta^6}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a estatística de Hotteling é dada por:

$$T_{T-LL}^2 = n \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T K^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 \\ \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\theta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\theta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 & \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n\theta^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \left[ \widehat{\delta}_{33} \left( \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \right)^2 + \widehat{\delta}_{22} \left( \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \right)^2 - 2\widehat{\delta}_{23} \left( \widehat{k}_2 - \widetilde{k}_2 \right) \left( \widehat{k}_3 - \widetilde{k}_3 \right) \right]$$

□

## B.2.4 Modelo TP

*Demonstração.* As expressões para os elementos da matriz assintótica dos LCs estimados estão apresentados abaixo:

$$K_3 = J_3^T \cdot M_3 \cdot J_3$$

com a matriz jacobiana das transformações de momentos para cumulantes dada por

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2m & 1 & 0 \\ -3(m_2 - 2m_1^2) & -3m_1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_3 = \begin{bmatrix} \widetilde{k}_2 & \widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2 & M_{13} \\ \widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

em que

$$M_{13} = \widetilde{k}_4 + 3\widetilde{k}_1\widetilde{k}_3 + 3\widetilde{k}_2 + 3\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2$$

$$M_{22} = \widetilde{k}_4 + 4\widetilde{k}_1\widetilde{k}_3 + 2\widetilde{k}_2 + 4\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2$$

$$M_{23} = \widetilde{k}_5 + 5\widetilde{k}_1\widetilde{k}_4 + 9\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3 + 9\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_3 + 12\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2^2 + 6\widetilde{k}_1^3\widetilde{k}_2$$

$$M_{33} = \widetilde{k}_6 + 6\widetilde{k}_1\widetilde{k}_5 + 15\widetilde{k}_2\widetilde{k}_4 + 15\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_4 + 9\widetilde{k}_3^2 + 54\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2\widetilde{k}_3 + 18\widetilde{k}_1^3\widetilde{k}_3 + 15\widetilde{k}_2^3 + 36\widetilde{k}_1^2\widetilde{k}_2^2 + 9\widetilde{k}_1^4\widetilde{k}_2$$

Portanto,

$$K_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \\ \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Com base na matriz  $(K_3)$ , calcula-se matriz de covariância assintótica  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}$$

Temos então,

$$K = \begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2}_{k_{22}} & \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{23}} \\ \underbrace{\tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3}_{k_{32}} & \underbrace{\tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3}_{k_{33}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{1}{(2\alpha)^4} [17 - (1 + \lambda)^4] + 2 \left[ \frac{1}{(2\alpha)^2} [5 - (1 + \lambda)^2] \right]^2 \\ k_{23} &= \frac{1}{(2\alpha)^5} [33 - (1 + \lambda)^5] + 6 \frac{1}{(2\alpha)^2} [5 - (1 + \lambda)^2] \frac{1}{(2\alpha)^3} [9 - (1 + \lambda)^3] \\ k_{33} &= \frac{1}{(2\alpha)^6} [65 - (1 + \lambda)^6] + 9 \frac{1}{(2\alpha)^2} [5 - (1 + \lambda)^2] \frac{1}{(2\alpha)^4} [17 - (1 + \lambda)^4] \\ &\quad + 9 \left[ \frac{1}{(2\alpha)^3} [9 - (1 + \lambda)^3] \right]^2 + 6 \left[ \frac{1}{(2\alpha)^2} [5 - (1 + \lambda)^2] \right]^3 \end{aligned}$$

Daí,

$$K = \frac{1}{(2\alpha)^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= (2\alpha)^2 \{17 - (1 + \lambda)^4 + 2 [5 - (1 + \lambda)^2]^2\} \\ \delta_{23} &= 2\alpha \{33 - (1 + \lambda)^5 + 6 [5 - (1 + \lambda)^2] [9 - (1 + \lambda)^3]\} \\ \delta_{33} &= 65 - (1 + \lambda)^6 + 9 [5 - (1 + \lambda)^2] [17 - (1 + \lambda)^4] + 9 [9 - (1 + \lambda)^3]^2 + 6 [5 - (1 + \lambda)^2]^3 \end{aligned}$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{(2\alpha)^6}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{23} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a estatística de Hotteling é dada por:

$$T_{T-LL}^2 = n \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T K^{-1} \left( \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 \\ \widehat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n(2\alpha)^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n(2\alpha)^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 & \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_2 - \tilde{k}_2 \\ \widehat{k}_3 - \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$T_{TLL}^2 = \frac{n(2\alpha)^6}{\delta_{22}\delta_{23} - \delta_{23}^2} \left[ \hat{\delta}_{33} (\widehat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22} (\widehat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23} (\widehat{k}_2 - \tilde{k}_2) (\widehat{k}_3 - \tilde{k}_3) \right]$$

□

# APÊNDICE C – Extensão da Classe T-G

## C.1 Transformada de Mellin

Se  $X$  uma variável aleatória contínua com fdp dada por (3.3), então a primeira fc do tipo II é calculado por

$$\phi_X(s) = (1 + \lambda) \cdot M_{s-1,0,0} - \alpha\lambda \cdot M_{s-1,\alpha-1,0} \quad , \quad |\lambda| \leq 1 \quad (\text{C.1})$$

com  $s \in \mathbb{C}$ , em que  $M_{i,j,k} = E\{X^i G(X)^j [1 - G(X)]^k\}$  é o MPP da distribuição-base.

### C.1.1 Submodelo NTW

Substituindo o MPP da distribuição Weibull (ver Tabela 8) na equação (C.1), segue que a primeira fc do tipo II do modelo NTW é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) - \alpha\lambda\sigma^{s-1} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} \frac{(-1)^m}{(m+1)^{1+(s-1)/\eta}} \\ &= \sigma^{s-1} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{\eta}\right) \left(1 + \lambda - \alpha\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} \frac{(-1)^m}{(m+1)^{1+(s-1)/\eta}}\right). \end{aligned}$$

### C.1.2 Submodelo NTF

Substituindo o MPP da distribuição Pareto (ver Tabela 8) na equação (C.1), segue que a primeira fc do tipo II do modelo NTF é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right) - \alpha\lambda\sigma^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \binom{0}{m} \frac{(-1)^m}{(\alpha-1+m+1)^{1-(s-1)/\eta}} \\ &= \left(1 + \lambda - \alpha\lambda \left(\frac{1}{\alpha^{1-(s-1)/\eta}}\right)\right) \sigma^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right) \\ &= \left(1 + \lambda - \frac{\alpha\lambda}{\alpha^{1-(s-1)/\eta}}\right) \sigma^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right) \\ &= \left(1 + \lambda - \lambda\alpha^{(s-1)/\eta}\right) \sigma^{s-1} \Gamma\left(1 - \frac{s-1}{\eta}\right). \end{aligned}$$

### C.1.3 Submodelo NTLL

Substituindo o MPP da distribuição log-logistic (ver Tabela 8) na equação (C.1), segue que a primeira fc do tipo II do modelo NTLL é dada por:

$$\begin{aligned}\phi_X(s) &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1}B\left(1 + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta}\right) - \alpha\lambda\sigma^{s-1}B\left(\alpha - 1 + \frac{s-1}{\eta} + 1, 1 - \frac{s-1}{\eta}\right) \\ &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1}B\left(1 + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta}\right) - \alpha\lambda\sigma^{s-1}B\left(\alpha + \frac{s-1}{\eta}, 1 - \frac{s-1}{\eta}\right).\end{aligned}$$

### C.1.4 Submodelo NTP

Substituindo o MPP da distribuição Pareto (ver Tabela 8) na equação (C.1), segue que a primeira fc do tipo II do modelo NTP é dada por:

$$\begin{aligned}\phi_X(s) &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1}B(1 - \eta, 1) - \alpha\lambda\sigma^{s-1}B(1 - \eta, \alpha - 1 + 1) \\ &= (1 + \lambda)\sigma^{s-1}B(1 - \eta, 1) - \alpha\lambda\sigma^{s-1}B(1 - \eta, \alpha).\end{aligned}$$