

**VINICIUS PEREIRA DO SACRAMENTO**

**OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO ÁREA-VELOCIDADE PARA  
ESTIMAÇÃO DE VAZÃO FLUVIAL**

RECIFE-PE - MAIO/2010



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

## **OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO ÁREA-VELOCIDADE PARA ESTIMAÇÃO DE VAZÃO FLUVIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

**Área de Concentração:** Desenvolvimento de Métodos Estatísticos e Computacionais

Orientador: Prof. Dr. Borko D. Stošić

Co-orientador: Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho

RECIFE-PE - maio/2010.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO ÁREA-VELOCIDADE PARA ESTIMAÇÃO DE VAZÃO  
FLUVIAL**

Vinicius Pereira do Sacramento

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida em 25/05/2010 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Dr. Borko D. Stošić  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof. Dr. José Ramon Barros Cantalice  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof. Dr. Plínio Barbosa de Camargo  
Universidade de São Paulo

*Aos meus pais, Sandra e  
Renato. E à minha mulher,  
Katia, com muito amor.*

## Agradecimentos

*Agradeço a Deus.*

*Aos meus pais, **Sandra e Renato**, pela dedicação e amor que sempre tiveram por mim*

*À minha mulher, **Katia**, por estar incondicionalmente ao meu lado.*

*À minha irmã, **Carmen**, sempre querendo meu bem.*

*Ao meu orientador, Prof. **Borko Stosic**, por me dar a oportunidade de trabalhar num projeto tão interessante.*

*Ao meu co-orientador Prof. **Moacyr Cunha**, pela invariável disposição em ajudar.*

*Ao Secretário **Marco Antônio dos Santos**, pela assistência.*

*À **Zuleide** pelo incentivo e, é claro, pelo cafezinho.*

*À **CAPES**, pelo apoio financeiro nesses últimos 6 meses.*

## Resumo

Neste trabalho, foi demonstrado como o método tradicional área-velocidade para estimação de descarga dos rios, pode ser adaptado através de um simples procedimento numérico, na base das considerações da dinâmica clássica dos fluidos e equações de Navier Stokes, para trazer múltipla economia em relação aos padrões adotados atualmente. O método área-velocidade representa o procedimento padrão para medição da descarga dos rios. Este procedimento é padronizado em nível internacional pela norma ISO EN 748:2007 da *International Standards Organization*, e exige medição de velocidade em várias verticais de uma seção vertical do rio, em várias profundidades para cada vertical. De forma geral, um número relativamente grande de medições é necessário para determinação da vazão. Nesta dissertação, foi demonstrado como o método área-velocidade pode ser otimizado através de um simples procedimento numérico, na base de considerações da dinâmica clássica dos fluidos e das equações de Navier Stokes. Mais precisamente, observou-se a forma funcional do perfil da velocidade, em função da profundidade, aplicando a regressão polinomial para cada vertical e, finalmente, a interpolação linear ou não-linear entre as verticais, para se chegar a uma interpolação contínua da velocidade para toda a área da seção vertical, que se torna extremamente robusta à remoção dos pontos da medida. Este procedimento foi aplicado para dados obtidos no riacho Exu, Estado de Pernambuco, em abril de 2008. Em particular, identificou-se que o número das medições pode ser significativamente reduzido, sem perda substancial da precisão da estimativa.

**Palavras-chave:** Método área-velocidade, equações de Navier-Stokes, interpolação.

## Abstract

This work demonstrates how the traditional velocity-area method for estimating river discharge can be adjusted via a simple numerical procedure, based on the considerations of classical fluid dynamics and the Navier Stokes equations, to yield multiple savings over the current international standards. The velocity-area method is the standard procedure for measuring the discharge of rivers. This procedure is standardized at the international level by the technical norm ISO EN 748:2007 of the *International Standards Organization*, and it requires the measurement of speed at various verticals of the river cross-section, at various depths for each vertical. In general, a relatively large number of measurements is needed to determine the flow. This work demonstrates that this procedure can be optimized through a simple numerical procedure, based on considerations of classical fluid dynamics and the Navier Stokes. More precisely, observing functional form of the velocity profile versus depth, applying polynomial regression for each vertical, and then linear or non-linear interpolation between the verticals, one arrives at a continuous interpolation for speed for the entire area of the cross-section, which turns out extremely robust to the removal of measurement points. This procedure is applied to data obtained in the river Exu, Pernambuco state, in April 2008. In particular, it is demonstrated that the number of measurements can be significantly reduced without substantial loss of accuracy of the estimate.

**Keywords:** Velocity-area method, the Navier-Stokes equations, interpolation.

# Lista de Figuras

1	Mapa da região da bacia hidrográfica do riacho Exu. escala de 1:100.000, folha SB.24-Z-C-V. . . . .	p. 17
2	Representação esquemática da seção molhada de um rio, dividida em verticais. . . . .	p. 18
3	Micro-Molinete. . . . .	p. 20
4	Molinete Fluviométrico com Lastro. . . . .	p. 20
5	Exemplo de vertical, com posições de instalação do molinete, da seção molhada do rio. . . . .	p. 20
6	Fluxo Laminar . . . . .	p. 24
7	Fluxo Turbulento . . . . .	p. 24
8	Fluxo Transitório . . . . .	p. 24
9	Fluxo entre duas placas paralelas . . . . .	p. 26
10	Perfil da velocidade entre duas placas paralelas para o caso supracitado . . . . .	p. 27
11	Seção vertical “estendida”. . . . .	p. 27
12	Seção vertical “estendida” com colunas mensuradas. . . . .	p. 28
13	Pontos de controle de uma curva de Bézier . . . . .	p. 32
14	Propriedades da casca convexa das curvas B-Spline . . . . .	p. 35
15	Representação esquemática do ajuste polinomial dos perfis da velocidade nas verticais, codificados em cores. . . . .	p. 38
16	Parábolas de Mínimo Quadrado que estimam o perfil da velocidade nas verticais da Figura 15. . . . .	p. 40
17	Cálculo da descarga do riacho Exu (09/04/08 - Manhã) em $m^3/s$ , usando diversos métodos. . . . .	p. 44

18	Cálculo de descarga do riacho Exu (14/04/08 - Manhã) em $m^3/s$ , usando diversos métodos. . . . .	p. 45
19	Cálculo de descarga do riacho Exu (15/04/08 - Manhã) em $m^3/s$ , usando diversos métodos. . . . .	p. 46
20	Cálculo de descarga do riacho Exu (15/04/08 - Tarde) em $m^3/s$ , usando diversos métodos. . . . .	p. 47
21	Cálculo de descarga do riacho Exu (16/04/08 - Tarde) em $m^3/s$ , usando diversos métodos. . . . .	p. 48

# Lista de Tabelas

- 1 Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 09/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros. . . . . p. 41
- 2 Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 14/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros. . . . . p. 41
- 3 Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 15/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros. . . . . p. 42
- 4 Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 15/04/08 - Tarde, com posição das verticais  $L$  em centímetros. . . . . p. 42
- 5 Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 16/04/08 - Tarde, com posição das verticais  $L$  em centímetros. . . . . p. 42
- 6 Cálculo da descarga de uma seção do riacho Exu pelo método tradicional área-velocidade, e diversas formas de interpolação contínua. Valores em azul representam desvios relativos em relação aos resultados obtidos por método área-velocidade. . . . . p. 49
- 7 Mesmos dados apresentados na Tabela 6, com desvios relativos (em azul) em relação aos resultados obtidos por interpolação *NURBS*, usando todos os pontos de medida. . . . . p. 50

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 13
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	p. 16
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	p. 17
3.1	Dados . . . . .	p. 17
3.2	Método área-velocidade . . . . .	p. 18
3.3	Avaliação da incerteza . . . . .	p. 21
3.4	Método Proposto Utilizado . . . . .	p. 22
3.5	Fluxo Laminar e Turbulento . . . . .	p. 23
3.6	Equações de Navier-Stokes . . . . .	p. 25
3.6.1	Solução das equações de Navier Stokes para duas placas paralelas	p. 26
3.6.2	Perfil local de velocidade . . . . .	p. 27
3.7	Regressão Polinomial pelos Mínimos Quadrados . . . . .	p. 28
3.7.1	Coeficiente de Pearson - $R^2$ . . . . .	p. 30
3.8	Interpolação entre as verticais . . . . .	p. 30
3.8.1	Interpolação linear . . . . .	p. 31
3.8.2	Curvas de Bézier . . . . .	p. 32
3.8.3	Definição e propriedades das Curva de Bézier . . . . .	p. 32
3.8.4	Curvas B-Spline . . . . .	p. 33
3.8.4.1	Definição de Curva de B-Spline . . . . .	p. 34
3.8.5	Curvas B-Spline Racionais . . . . .	p. 36
3.8.5.1	Definição de Curvas B-Spline Não Uniformes . . . . .	p. 36

3.8.6 Superfícies B-spline Racionais . . . . .	p. 37
<b>4 Resultados</b>	p. 38
<b>5 Conclusões</b>	p. 51
<b>6 Recomendações</b>	p. 52
Apêndice . . . . .	p. 52
<b>Apêndice A</b>	p. 53
<b>Referências</b>	p. 56

# 1 Introdução

A busca pelo melhor gerenciamento dos recursos hídricos vem ganhando destaque nas últimas décadas. Por intermédio de medidas legais, científicas, e administrativas, se procura alcançar o consumo sustentável da água disponível no mundo. Para que essa busca tenha êxito, a coleta permanente de dados e sua interpretação são necessárias, a fim de se saber o comportamento das vazões fluviais e sazonalidades dos rios, bem como os regimes pluviométricos de suas respectivas bacias hidrográficas. Os rios são de suma importância ao ser humano, deles é possível extrair alimento, através da pesca, e água potável; podem ser usados como hidrovias, fonte de água para irrigação, para geração de energia elétrica, etc. A geomorfologia fluvial é a ciência que estuda os rios e bacias hidrográficas e a investigação da dinâmica do escoamento dos rios faz parte deste campo científico.

O comportamento da vazão fluvial influi diretamente no transporte de sedimentos e no contorno da topográfica do leito. A associação da degradação das bacias hidrográficas, principalmente pela ação antrópica, no uso do solo, aos fenômenos climáticos naturais resulta na mobilização de sedimentos em quantidades maiores que as produzidas em centenas de anos em condições de equilíbrio natural (Simões e Coiado, 2001). Uma estimativa correta do volume de sedimento transportado por um rio é fundamental na estratégia de gestão dos recursos hídricos. Um maior conhecimento do funcionamento das variações a longo prazo das cargas de sedimento, em uma variedade de rios, é necessário para avaliação das tendências globais da transferência de sedimentos do continente ao oceano, e seu padrão no contexto das mudanças de clima (Walling e Fang, 2003, Ludwig e Probst 1998, Gordeev 2006). Os danos associados com erosão e transporte de partículas são numerosos e esses acarretam impactos na fertilidade do solo, transporte, armazenamento e destino de nutrientes e contaminantes, tendências de mudanças na qualidade da água, habitat aquáticos, assoreamento de canais, reservatórios e portos, além da redução na longevidade dos equipamentos de hidroelétricas (Williams, 1989; Ouillon, 1998; Horowitz, 2003).

Por outro lado, não apenas sedimentos podem ser transportados para os rios. Devido ao crescimento das cidades e conseqüente aumento na produção de dejetos domésticos e industriais emitidos, faz-se necessário, ainda mais, o estudo do transporte e do comportamento desses materiais pelo fluxo fluvial. O nível de poluição das bacias hidrográficas, causado pelo descarte de dejetos, tanto domésticos quanto industriais, além da ocupação desordenada das margens ciliares, trazem sérias conseqüências para a qualidade da água, com o assoreamento de rios (Froehner 2009).

As questões climáticas, somadas à dinâmica hidrológica dos grandes rios e suas respectivas planícies de inundação, são responsáveis por grandes enchentes que assolam o planeta. Várias indagações técnicas e político-administrativas foram feitas, acerca do custo de modificação das planícies de inundação, com o intuito de diminuir os efeitos catastróficos desse tipo de fenômeno ambiental. Também, se questiona o quão efetivas são as ações como restauração e preservação dos ecossistemas adjacentes às bacias tributárias, rios e suas planícies de inundação (Simões e Coiado 2001). Os processos de modelagem, mesmo sendo empíricos, são de suma importância na procura de se entender os processos climáticos e a dinâmica hidrológica (Coe et al. 2002). Tal entendimento se faz necessário, para decidir quais são as melhores formas de manejo do ecossistema. Ao analisar a correlação dos diversos níveis das áreas alagadas, com os índices fluviométricos dos diversos períodos anuais, podem-se criar mapas temáticos das séries históricas relacionadas às condições a que o sistema fluvial foi submetido em seus diversos níveis fluviométricos. O estudo dessas informações possibilita um melhor entendimento da dinâmica de inundação.

Diversos aspectos discutidos acima, vinculados ao melhor entendimento dos recursos hídricos e seu gerenciamento na direção de maximizar os benefícios e minimizar os efeitos não-desejáveis, dependem fortemente das medidas precisas e sistemáticas das descargas líquidas dos rios (vazão). Várias organizações internacionais, nacionais (dos diversos países), e locais (e.g. estaduais ou instituições de pesquisa) contribuem para aquisição e manutenção destes dados, com ênfase na sua organização e divulgação. Por exemplo, nos Estados Unidos, a agência *U.S. Geological Survey* iniciou a coleta de informações sobre vazão dos rios, em 1889, e, atualmente, sistematicamente, recolhe dados, em 7000 sítios, (USGS 2010). No Brasil, a Agência Nacional das Águas (ANA) regulamenta e opera; além de manter a Rede Básica Hidrometeorológica, composta de 4.633 estações pluviométricas, evaporimétricas, fluviométricas, sedimentométricas e de qualidade da água, que medem respectivamente: o volume de chuvas, a evaporação das águas, a vazão dos rios, a quantidade de sedimentos e a qualidade das águas. Tal rede monitora 2.176 dos 12.962

rios cadastrados no sistema de informações ANA/Hidroweb. A ANA também tem gerenciamento no Sistema Nacional de Informações sobre os Recursos Hídricos (SNIRH), que é um sistema de coleta, tratamento, armazenamento e recuperação de informações sobre recursos hídricos e fatores intervenientes (ANA 2010).

De forma geral, as medidas de descarga líquida são efetuadas em vários sítios, ao longo de uma bacia hidrográfica, para vários níveis do rio. Em seguida, estes dados são utilizados para estabelecer curvas de descarga (ou curvas-chaves; dependência funcional e empírica entre descarga e o nível), para monitoramento posterior. Entretanto, torna-se necessário determinar a vazão para cada sítio, para diversos níveis do rio, para tal é usualmente utilizado método área-velocidade, padronizado no nível internacional pela norma técnica da *International Standards Organization* ISO 748:2007 (ISO 2007a). Este método exige medição de velocidade em várias verticais de uma seção vertical do rio, em várias profundidades para cada vertical, sendo os produtos da velocidade média com área da cada vertical integrados a fim de calcular vazão. De forma geral, um número relativamente grande de medições é necessário para a determinação da vazão para cada sítio e para cada nível do rio.

## 2 Objetivos

O objetivo, neste trabalho, é demonstrar como o método tradicional pode ser otimizado, através de um simples procedimento numérico, na base de considerações da clássica dinâmica dos fluidos e equações de Navier Stokes. Mais precisamente, observando-se a forma funcional do perfil da velocidade, em função da profundidade, aplica-se a regressão polinomial para cada vertical para determinar o perfil da velocidade correspondente. Em seguida, usa-se a interpolação linear ou não-linear (utilizando *Non Uniform rational B-splines*, ou *NURBS*) entre as verticais, para gerar uma interpolação contínua da velocidade para toda a área da seção vertical, que é, finalmente, integrada, numericamente, para estimar vazão. Propõe-se que este procedimento é extremamente robusto para a remoção dos pontos da medida, e que o número das medições pode ser significativamente reduzido sem perda substancial da precisão da estimativa. Para demonstrar a eficiência do método atual proposto, este procedimento foi aplicado para dados obtidos no riacho Exu, Estado de Pernambuco, em abril de 2008. Também, utilizou-se software escrito em linguagem C para aplicação deste método, com interface gráfica (*Graphical User Interface*) para plataforma Windows, e será disponibilizado para comunidade científica, com a intenção de possibilitar a experimentação e a comparação do método atual com os outros existentes, em nível internacional.

## 3 Metodologia

### 3.1 Dados

Os dados utilizados, neste trabalho, apresentados no Apêndice A, foram coletados no riacho Exu, Estado de Pernambuco, no período de 26 de março de 2008 a 18 de abril de 2008 (Cunha Filho 2010). Citando (com permissão) da referencia original sobre a bacia hidrográfica do riacho Exu:

*A bacia hidrográfica do riacho Exu encontra-se na região do alto Sertão do Pageú, ambiente semi-árido do estado de Pernambuco. O acesso se dá pela rodovia federal BR-232-km 448, pertencentes ao limite municipal da cidade de Serra Talhada, com coordenadas geográficas de 38° 25'43" de longitude Oeste e 8° 00'06" de latitude Sul, Figura 1. O clima da região, de acordo com a classificação de Köppen enquadra-se no tipo Bwh, denominado semi-árido, quente e seco, com chuvas de verão-outono com pluviosidade média anual para o período de 1912 a 1991 de 647 mm/ano e temperatura média anual superior a 25° C (Cunha Filho 2010).*

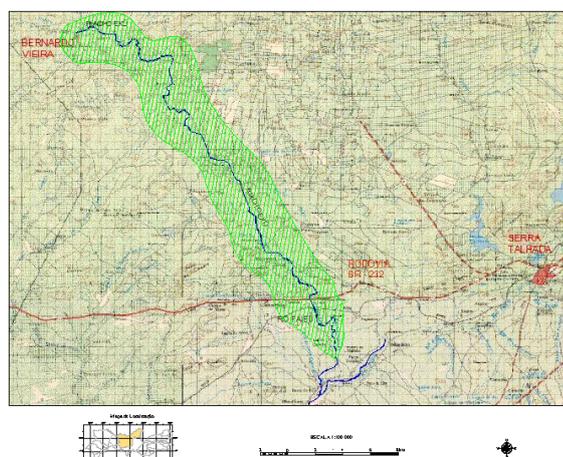


Figura 1: Mapa da região da bacia hidrográfica do riacho Exu. escala de 1:100.000, folha SB.24-Z-C-V.

## 3.2 Método área-velocidade

O padrão internacional ISO 748:2007, baseado em trabalhos (Buchanan e Sommers 1969; Rantz et al. 1982), define o método área-velocidade para medição de descarga líquida  $Q$  de um rio, como soma das descargas parciais  $q_i$  que são definidos pelos produtos entre os valores de velocidade média  $V_i$  do escoamento, nas múltiplas verticais ( $i = 1, \dots, N$ ) que compõem esta seção (como apresentado de forma esquemática na Figura 2), com suas respectivas áreas  $A_i$

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N A_i \bar{V}_i . \quad (3.1)$$

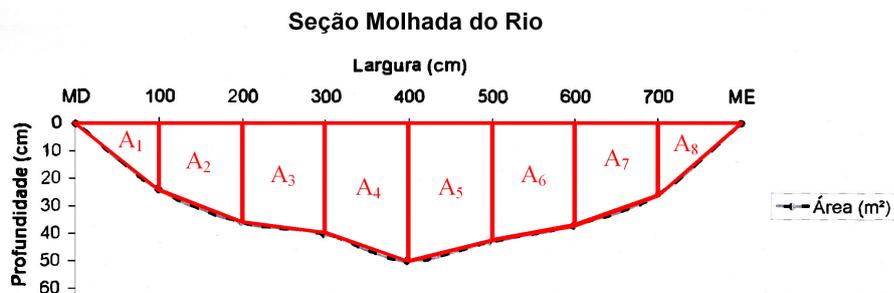


Figura 2: Representação esquemática da seção molhada de um rio, dividida em verticais.

A escolha do número das verticais depende do comprimento do rio, onde de forma geral cada segmento deveria contribuir com menos de 5% do fluxo total e nunca deveria exceder 10%.

As áreas  $A_i$  das verticais são aproximadas por trapezóides indicados em vermelho na Figura 2, ou seja, pela largura da cada vertical multiplicada pela média das profundidades nas suas laterais.

Finalmente a velocidade média  $V_i$  da cada vertical é determinada na base das múltiplas medidas em diversas profundidades, onde (dependendo da profundidade da vertical e dos recursos disponíveis), na prática, se adota um de seguintes procedimentos:

- **Método de ponto único** As medidas de velocidade são feitas para cada vertical em 0,6 da profundidade total, abaixo da superfície. O valor observado é adotado como velocidade média da vertical.

- **Método de dois pontos** As medidas de velocidade são feitas para cada vertical em 0,2 e 0,8 da profundidade total, abaixo da superfície. A média aritmética dos valores observados é adotado como a velocidade média da vertical.
- **Método de três pontos** As medidas de velocidade são feitas para cada vertical em 0,2, 0,6 e 0,8 da profundidade total, abaixo da superfície. A velocidade média da vertical é determinada pela equação

$$v = (v_{0,2} + 2v_{0,6} + v_{0,8}) / 4 .$$

- **Método de cinco pontos** Medidas de velocidade são feitas para cada vertical em 0,2, 0,6 e 0,8 da profundidade total, abaixo da superfície, bem como o mais perto possível da superfície e do fundo. A velocidade média da vertical pode ser determinada graficamente do perfil da velocidade, ou pela equação

$$v = (v_{superf.} + 3v_{0,2} + 3v_{0,6} + 2v_{0,8} + v_{fundo}) / 10 .$$

- **Método de seis pontos** Medidas de velocidade são feitas para cada vertical em 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8 da profundidade total, abaixo da superfície, bem como o mais perto possível da superfície e do fundo. A velocidade média da vertical pode ser determinada graficamente do perfil da velocidade, ou pela equação

$$v = (v_{superf.} + 2v_{0,2} + 2v_{0,4} + 2v_{0,6} + 2v_{0,8} + v_{fundo}) / 10 .$$

Na prática, os métodos de um, dois e três pontos são mais comumente utilizados. Já os métodos de cinco, seis pontos e da análise gráfica do perfil da velocidade para cada vertical são reservados para estudos que exigem elevada precisão das medidas.

Nas Figuras 3 e 4 abaixo estão mostrados os molinetes utilizados no estudo do riacho Exu, em abril 2008 (Cunha Filho 2010), enquanto Figura 5 apresenta de forma esquemática seu posicionamento.



Figura 3: Micro-Molinete.



Figura 4: Molinete Fluviométrico com Lastro.

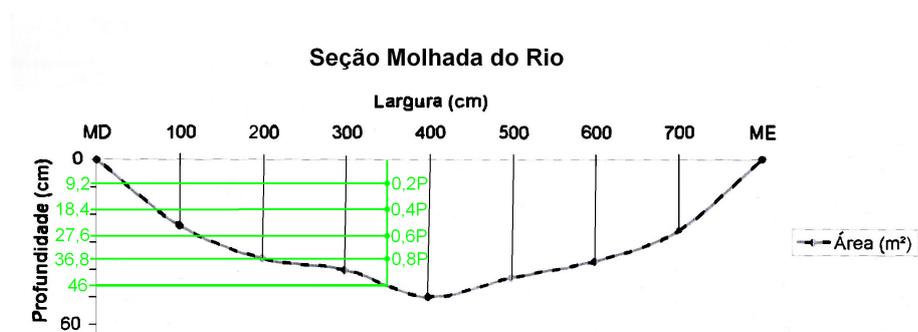


Figura 5: Exemplo de vertical, com posições de instalação do molinete, da seção molhada do rio.

### 3.3 Avaliação da incerteza

A estimativa da descarga, através do método área velocidade, envolve a medição de largura e profundidade das verticais, bem como a velocidade média. A incerteza desta estimativa representa uma combinação das incertezas das grandezas componentes.

Padrão internacional ISO 1088:2007 (ISO 2007b) regula o procedimento de avaliação desta incerteza, através de equação

$$u(Q)^2 = u_m^2 + u_s^2 + \frac{\sum_{i=1}^m \left( (b_i d_i \bar{v}_i)^2 \left( u_{b,i}^2 + u_{d,i}^2 + u_{p,i}^2 + \frac{1}{n_i} (u_{c,i}^2 + u_{e,i}^2) \right) \right)}{\left( \sum_{i=1}^m b_i d_i \bar{v}_i \right)^2}, \quad (3.2)$$

onde  $u(Q)$  é incerteza relativa percentual padrão (nível de confiança 68%) de descarga estimada  $Q$ ,  $u_m$  é incerteza induzida pelo limitado número  $m$  de verticais,  $u_s$  é incerteza correspondente aos erros de calibração de instrumentos,  $u_{b,i}$  e  $u_{d,i}$  são incertezas relativas aos percentuais de largura e profundidade da vertical  $i$ , enquanto  $u_{p,i}$ ,  $u_{c,i}$  e  $u_{e,i}$  representam incertezas da estimação de velocidade média  $\bar{v}_i$  correspondentes ao número discreto  $n_i$  de profundidades usadas para estimativa, variação em resposta do aparelho de medição, e flutuações do fluxo, respectivamente.

Na base de estudos extensivos dos dados reais, o padrão ISO 1088:2007 sugere valores para as componentes da incerteza como segue:

- Incerteza  $u_m$  induzida pelo número limitado  $m$  de verticais pode ser estimada pela seguinte tabela

$m$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$u_m(\%)$	7,5	4,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	1,0	1,0

- Valor prático de 1% pode ser adotado para a incerteza  $u_s$  correspondente aos erros de calibração de instrumentos.
- As incertezas  $u_b$  e  $u_d$  de medição de largura e profundidade das verticais não deverão ultrapassar 0,5%.
- Incerteza  $u_{p,i}$  induzida pelo número limitado  $n_i$  de medidas em diversas profundidades da vertical  $i$ , pode ser estimada pela seguinte tabela

Método	Incerteza
Superfície	15
1 ponto (0,6D)	7,5
2 pontos (0,2D e 0,8D)	3,5
5 pontos	2,5
Distribuição contínua	0,5

- Incerteza  $u_{c,i}$  da velocidade pontual, induzida pela variação em resposta do aparelho de medição em diversas profundidades da vertical  $i$ , pode ser estimada pela seguinte tabela

Velocidade ( $m/s$ )	0,03	0,10	0,15	0,25	0,50	> 0,50
$u_c$	10	2,5	1,25	2,0	0,5	0,5

- Incerteza  $u_{e,i}$  da medida das velocidades pontuais, induzida pelas flutuações (pulsações) da corrente, depende da velocidade e do tempo de medida. Para o tempo de medição de 3 minutos e intervalo de velocidade do estudo atual, podem ser adotados os valores  $u_{e,i} = 3,0\sqrt{n_i}$ , onde  $n_i$  é número de medidas em diversas profundidades da vertical  $i$

Finalmente, a incerteza expandida com fator de cobertura  $k$  é dada por

$$U_k(Q) = ku(Q) \quad , \quad (3.3)$$

onde e.g. para  $k = 2$  tem-se intervalo de confiança de 95%.

### 3.4 Método Proposto Utilizado

O método área velocidade padrão ISO 748:2007 implementa aproximação da velocidade média das verticais individuais com vários graus de precisão, enquanto a interpolação entre as verticais é implementada de forma discreta (que depende só da escolha prévia do número das verticais), adotando valor estimado da velocidade média no centro da uma vertical, para toda a sua superfície.

Neste trabalho, propõe-se ajuste polinomial para os perfis da velocidade para posição central de cada vertical, o que permite interpolação suave (linear ou não-linear) entre estas posições centrais; além de propiciar uma representação mais "suave" do perfil da velocidade na seção como um todo, o que torna este procedimento extremamente robusto na

remoção dos pontos de medida sem perda significativa da precisão da estimativa da descarga total, podendo ser utilizado para trazer economia em comparação com o método padrão.

O método numérico proposto é composto dos seguintes passos:

- Implementar ajuste polinomial de segundo grau para gerar os perfis da velocidade para posição central de cada vertical.
- Implementar interpolação linear, ou não-linear (através do método *Non Uniform Rational B-splines*, ou *NURBS*) entre os centros das verticais.
- Implementar integração numérica para cálculo da descarga.

No que segue nas próximas seções, primeiro são levadas em conta algumas considerações gerais sobre o fluxo laminar e turbulento; e as equações hidro-dinâmicas de Navier Stokes, cuja análise justifica a forma funcional adotada para ajuste do perfil de velocidade, nas posições centrais das verticais. Em adição, vem uma descrição sucinta do método dos mínimos quadrados adotado, para os ajustes não lineares adotados neste trabalho. Em seguida são abordados elementos sobre curvas *B-spline* e *NURBS*, necessários para a implementação de interpolação não-linear.

### 3.5 Fluxo Laminar e Turbulento

O fluxo de um fluido pode ser classificado entre laminar ou turbulento, e o experimento clássico de Reynolds é o que melhor descreve os tipos de fluxos. Considere a água que flui por um tubo transparente de um reservatório. Um corante é injetado na entrada do tubo. Para uma taxa de fluxo pequena, a tintura permanecerá intacta e forma um único filamento que se move junto com o fluido. Esse é o fluxo laminar desde que o corante flua de forma ordenada. Para uma taxa de fluxo grande, a tintura oscilará aleatoriamente. Isto se deve à variação microscópica do campo velocidade e a rápida dispersão do corante é observada ao longo do tubo. Logo, quando o fluxo de tintura é instável e oscila, ao longo do campo de fluxo, é chamado então de fluxo turbulento. Numa taxa de fluxo intermediária, o fluido está em transição. O corante a princípio fica intacto, mas lentamente se torna oscilante à medida que se move ao longo do tubo. As oscilações, no entanto, não são tão intensas como no fluxo completamente turbulento. A grandeza usada para julgar se o fluxo do fluido

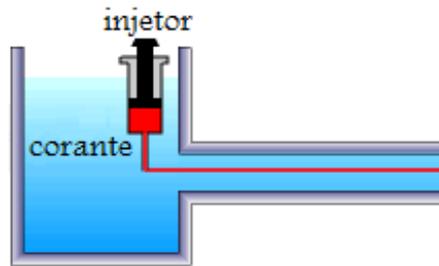


Figura 6: Fluxo Laminar

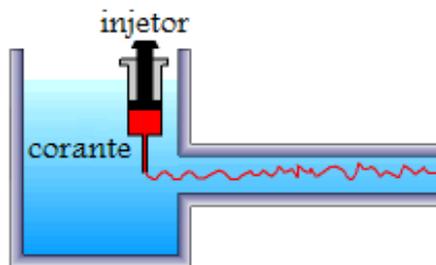


Figura 7: Fluxo Turbulento

é laminar ou turbulento é chamada número de *Reynolds* ( $Re$ ), determinado por

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad , \quad (3.4)$$

de onde se conclui que a natureza do fluxo (laminar vs turbulento), não só depende da sua velocidade  $V$ , mas também da sua densidade  $\rho$ , viscosidade  $\mu$ , e dimensão linear característica  $L$  do conduto. Para fluxo entre placas paralelas, o fluxo é laminar quando  $Re < 1,400$ ; é transitório quando  $1400 < Re < 2100$  enquanto que o fluxo de fluido através de um tubo é turbulento quando  $Re > 2,100$  (Landau e Lifshitz, 1987).

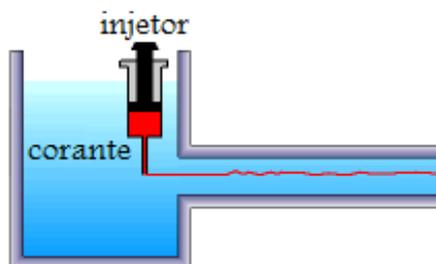


Figura 8: Fluxo Transitório

### 3.6 Equações de Navier-Stokes

As Equações de Navier Stokes representam ferramenta fundamental da dinâmica dos fluidos, representadas por um sistema de equações parciais diferenciais não-lineares, que são obtidas através da segunda Lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ , em que  $\vec{F}$  é a força vetorial,  $m$  é massa e  $\vec{a}$  a aceleração vetorial, aplicadas a um elemento de fluido de massa infinitesimal  $dm$ , escoando com velocidade  $\vec{v}$ , no qual agem as forças de superfície (pressão e atrito)  $\vec{F}_S$  e a força da gravidade  $\vec{F}_g$ . Desta forma vem a equação

$$\vec{F}_g + \vec{F}_S = dm \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (3.5)$$

Equações de Navier Stokes na sua forma vetorial são dadas por

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} , \quad (3.6)$$

onde  $\rho$  é densidade,  $\mu$  coeficiente de viscosidade dinâmica,  $p$  é pressão,  $\vec{v}$  e  $\vec{g}$  são vetores de velocidade e de aceleração gravitacional, respectivamente,  $\nabla$  é gradiente e  $\nabla^2$  é operador de Laplace. O lado esquerdo da equação 3.6 , representa a aceleração de uma partícula do fluido, igualando-se com a força resultante agindo devido ao gradiente de pressão  $-\nabla p$  (por unidade de volume), a força induzida pela viscosidade do fluido  $\mu \nabla^2 \vec{v}$  e à força gravitacional  $\rho \vec{g}$  (Landau e Lifshitz, 1987).

As equações de Navier Stokes representam um sistema de equações parciais diferenciais não-lineares, cuja solução analítica não é possível para o caso geral. Em alguns casos em que estas equações descrevem um fluxo laminar, podem ser encontradas soluções exatas, ao contrário de quando o fluxo é turbulento, em que a solução exata não é possível (Wang, 1991). O termo não-linear  $\vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v}$  é a aceleração conectiva ou estacionária que depende do espaço, como é exemplificado quando há mudança no diâmetro do tubo, em que a velocidade do fluido é inversamente proporcional a esse.

Forma explícita das equações de Navier-Stokes em sistema de coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  é dada por:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z . \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.6.1 Solução das equações de Navier Stokes para duas placas paralelas

Considere o fluxo laminar constante de fluido incompressível entre duas placas horizontais paralelas infinitas, junto com as suposições de gradiente de pressão constante na direção  $x$  ( $\frac{\partial p}{\partial x} = const$ ;  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ ) e força gravitacional na direção  $y$  ( $g_y = g$ ;  $g_x = g_z = 0$ ), como mostrado na Figura 9. O fluxo está na direção  $x$ , portanto, não há velocidade nem na

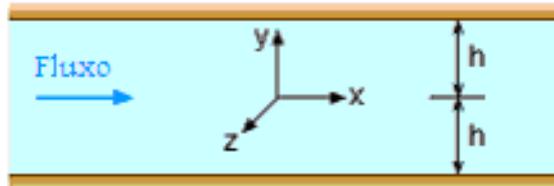


Figura 9: Fluxo entre duas placas paralelas

componente  $y$ , nem na direção  $z$  (ou seja,  $v_y = v_z = 0$ ), e pela suposição de fluxo laminar constante segue que componente  $v_x$  não depende da posição  $x$ . Considerando ainda que as placas tem tamanho infinito, pode-se concluir que a velocidade  $v_x$  não deveria ser uma função de  $z$ , ou seja, só deve ser uma função de  $y$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_x(y) . \quad (3.8)$$

Para estas condições de contorno, as equações 3.7 reduzem-se a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 . \quad (3.11)$$

As equações 3.9-3.11 indicam que a pressão é uma função de  $x$  e de  $y$ , e integrando da equação 3.10 temos

$$p = \rho g y + k .$$

Como  $\frac{\partial p}{\partial x}$  é assumido constante, integrando a equação 3.9 duas vezes com relação a  $y$  tem-se

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 .$$

Finalmente, aplicando a condição de "nenhum-deslize"(i.e., o fluido é "aderido"às placas, ou  $v_x = 0$  quando  $y = \pm h$ ) se determinam os coeficientes das equações

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + C_1 h + C_2$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 - C_1 h + C_2 ,$$

de onde segue

$$c_1 = 0 \quad ; \quad c_2 = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} .$$

A equação da velocidade agora se torna

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) , \quad (3.12)$$

que é nada mais do que a equação de uma parábola, em que a velocidade  $v_x$  depende da profundidade  $y$ . Figura 10 apresenta de forma esquemática solução 3.12 para o perfil da velocidade entre as placas paralelas infinitas.

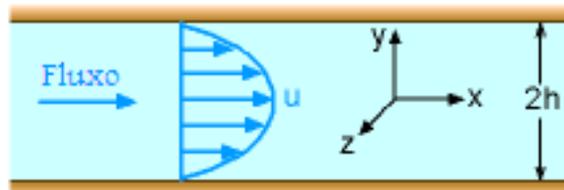


Figura 10: Perfil da velocidade entre duas placas paralelas para o caso supracitado

### 3.6.2 Perfil local de velocidade

Considere agora uma seção vertical do rio “estendida” como mostrado na Figura 11, com imagem virtual invertida na parte superior, com “profundidade negativa”. Esta “extensão” virtual não muda o comportamento do fluido na parte inferior, considerando que velocidade é uma função simétrica em relação à linha da profundidade zero (superfície).

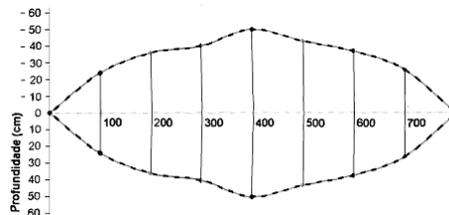


Figura 11: Seção vertical “estendida”.

Uma faixa vertical da largura infinitesimal certamente não pode ser considerada como ambiente entre placas planas infinitas da Figura 10, o que seria obtido se esta faixa fosse

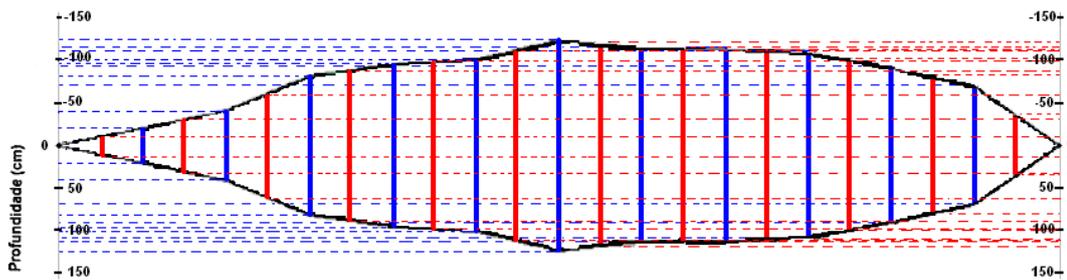


Figura 12: Seção vertical “estendida” com colunas mensuradas.

extraída do sistema como um todo, e replicada em ambos os lados *ad infinitum*. Por outro lado, pode ser esperado que influência do resto do sistema não mudará a forma geral quadrática da dependência da velocidade de profundidade nesta fina faixa vertical, e que pode ser esperado que forma funcional do perfil local da velocidade pode ser aproximada por

$$v = a + by + cy^2 \quad , \quad (3.13)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são coeficientes de ajuste, a serem determinados pela regressão polinomial para cada vertical medida.

A Proposta atual da estimativa da descarga, constitui-se na determinação dos coeficientes da regressão polinomial para cada vertical (de largura infinitesimal) onde as medidas da velocidade foram efetuadas, com posterior interpolação (linear ou não-linear) entre as verticais.

### 3.7 Regressão Polinomial pelos Mínimos Quadrados

No caso geral de um conjunto de dados  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1 \dots n$  de medida de uma variável dependente  $y$  para diversos valores da variável independente  $x$ , supondo dependência funcional entre as variáveis  $y = g(x, \Theta)$ , onde  $\Theta$  é o vetor dos parâmetros, o método de mínimos quadrados busca minimizar a soma dos resíduos quadrados

$$S(\Theta) = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i, \Theta))^2 \quad , \quad (3.14)$$

ou seja, constitui-se em encontrar o membro  $g(x, \hat{\Theta})$  da família das funções  $g(x, \Theta)$  a que melhor ajustem os dados, ou mais explicitamente, aquela função (membro da família  $g$ ) para a qual a soma das “distâncias” entre os pontos observados e a curva de ajuste, seja

mínima (Spiegel, 1976).

No caso particular da escolha de forma polinomial,

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k, \quad (3.15)$$

a soma dos quadrados dos resíduos é dada por

$$S(a) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)]^2, \quad (3.16)$$

cuja minimização é realizada através de solução simultânea do sistema das equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a)}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1x_i + \hat{a}_2x_i^2 + \cdots + \hat{a}_kx_i^k)] = 0 \\ \frac{\partial S(a)}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1x_i + \hat{a}_2x_i^2 + \cdots + \hat{a}_kx_i^k)] x_i = 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{\partial S(a)}{\partial a_k} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1x_i + \hat{a}_2x_i^2 + \cdots + \hat{a}_kx_i^k)] x_i^k = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

para os coeficientes  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k$ . Organizando o sistema de equações 3.17 na forma

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 n &+ \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i &+ \hat{a}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &+ \cdots + \hat{a}_k \sum_{i=1}^n x_i^k &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i &+ \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &+ \hat{a}_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &+ \cdots + \hat{a}_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &&&&&\vdots \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i^k &+ \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} &+ \hat{a}_2 \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} &+ \cdots + \hat{a}_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} &= \sum_{i=1}^n x_i^k y_i, \end{aligned}$$

se torna evidente que se trata de um sistema linear de equações, que pode ser facilmente resolvido através de métodos numéricos tradicionais.

No caso atual de um polinômio de grau  $k = 2$ , o sistema de equações acima reduz-se para

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \langle x \rangle + \hat{a}_2 \langle x^2 \rangle &= \langle y \rangle \\
\hat{a}_0 \langle x \rangle + \hat{a}_1 \langle x^2 \rangle + \hat{a}_2 \langle x^3 \rangle &= \langle xy \rangle \\
\hat{a}_0 \langle x^2 \rangle + \hat{a}_1 \langle x^3 \rangle + \hat{a}_2 \langle x^4 \rangle &= \langle x^2 y \rangle ,
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

onde foi utilizada notação  $\langle A \rangle = (\sum_{i=1}^n A_i) / n$ , com solução explícita

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= \frac{\langle y \rangle \langle x^3 \rangle^2 - \langle y \rangle \langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle - \langle x \rangle \langle x^3 \rangle \langle x^2 y \rangle + \langle x \rangle \langle xy \rangle \langle x^4 \rangle + \langle x^2 \rangle^2 \langle x^2 y \rangle - \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle \langle xy \rangle}{\langle x^3 \rangle^2 - \langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle + \langle x^2 \rangle^3 + \langle x \rangle^2 \langle x^4 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle} \\
\hat{a}_1 &= \frac{-\langle x \rangle \langle x^2 \rangle \langle x^2 y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle \langle x^4 \rangle + \langle x^2 \rangle^2 \langle xy \rangle + \langle x^3 \rangle \langle xy \rangle - \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle \langle y \rangle - \langle xy \rangle \langle x^4 \rangle}{\langle x^3 \rangle^2 - \langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle + \langle x^2 \rangle^3 + \langle x \rangle^2 \langle x^4 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle} \\
\hat{a}_2 &= \frac{-\langle x^2 \rangle \langle x^2 y \rangle - \langle x \rangle \langle x^2 \rangle \langle xy \rangle + \langle x^2 \rangle^2 \langle y \rangle + \langle x^3 \rangle \langle xy \rangle + \langle x \rangle^2 \langle x^2 y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \langle x^3 \rangle}{\langle x^3 \rangle^2 - \langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle + \langle x^2 \rangle^3 + \langle x \rangle^2 \langle x^4 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle} .
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

### 3.7.1 Coeficiente de Pearson - $R^2$

Para avaliar o grau de ajuste, de uma regressão polinomial, usa-se o coeficiente  $R^2$  de Pearson definido por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2} . \tag{3.20}$$

E ainda

$$R_{ajustado}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(m+1)} \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2} . \tag{3.21}$$

Em que  $n$  é o número de observações;  $m$  é o grau da regressão polinomial;  $\bar{y}$  é a média aritmética simples dos valores observados;  $\hat{y}_i$  são os valores estimados e  $y_i$  são os valores observados. O coeficiente de Pearson  $R^2$  é um número real e varia entre 0 e 1, onde 1 significa que a regressão está ajustada, totalmente, aos dados observados. E 0 informa que a regressão em nada representa os dados observados, ou seja, a curva não está ajustada.

## 3.8 Interpolação entre as verticais

Como já foi mencionado anteriormente, depois de determinar os coeficientes da regressão polinomial para cada vertical (de largura infinitesimal), onde as medidas da velocidade

foram efetuadas, a proposta atual da estimativa da descarga, visa à interpolação contínua entre as verticais.

### 3.8.1 Interpolação linear

A forma mais direta de implementar o procedimento proposto é através de interpolação linear, onde entre duas verticais em posições  $x_\ell$  e  $x_{\ell+1}$ , com respectivos valores dos coeficientes dos polinômios (perfil de velocidade em função de profundidade,  $v(y)$ ) ajustados  $a_{i,\ell}$  e  $a_{i,\ell+1}$  ( $i \in \{0, 1, 2\}$ ), respectivamente, o perfil da velocidade na posição  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$  fica aproximado pelo polinômio com coeficientes

$$a_{i,x} = ta_{i,\ell} + (t - 1)a_{i,\ell+1} \quad ; \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (3.22)$$

onde

$$t = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} .$$

Desta forma, tem-se uma interpolação contínua entre os polinômios que descrevem um perfil da velocidade entre as verticais adjacentes.

A vantagem deste procedimento encontra-se em sua simplicidade e velocidade na implementação numérica, porém, ele só garante continuidade  $C^0$ , ou seja, enquanto a velocidade na direção  $x$  é contínua, as derivadas do perfil da velocidade na direção  $x$  não são necessariamente funções contínuas nas posições da medida (porque à esquerda da vertical, a interpolação é efetuada em conjunto com o polinômio da vertical anterior. Enquanto que no lado direito, a interpolação é efetuada com o polinômio da vertical posterior). Do ponto de vista prático isto não representa um problema *a priori*, levando em conta que o método clássico área-velocidade aproxima perfil da velocidade na direção  $x$  através de uma função descontínua (mesmo sem continuidade  $C^0$  - tampouco o valor da velocidade têm continuidade). Porém, com o propósito de investigar o efeito de suavidade da superfície de interpolação, neste trabalho, além da interpolação linear, também é utilizada a interpolação não-linear através do método *Non Uniform Rational B-Splines (NURBS)*. Este método atualmente representa o padrão mundialmente adotado para a descrição de curvas e superfícies, na computação gráfica.

### 3.8.2 Curvas de Bézier

Antes de começar a abordar as curvas e superfícies *NURBS* (*Não Uniforme B-Spline Racional*), deve-se olhar para suas formas antecedentes, mais especificamente, curvas de Bézier. Existe uma classe de problemas para desenho de forma, em que a forma básica foi obtida, por meio de cálculos matemáticos e/ou avaliação experimental. Exemplos, desta classe de formas, são asas de aeronave, carros de corrida, peças de máquina e partes estruturais. Para este caso, na maioria das vezes, são obtidos resultados excelentes usando a "técnica de fitting", para uma curva ou superfície. Neste contexto, requer-se que a curva, ou superfície resultante, passe por todos os pontos previamente definidos. Algumas dessas técnicas são: *splines* cúbicos ou parabólicos misturado com técnicas de interpolação. Porém, há outra classe de problemas de desenho de formas, que dependem de exigências estéticas e funcionais. Estes problemas freqüentemente são chamados de desenho *ab initio*. Entre esses, podem-se destacar casos como: peças de carroceria de carros, fuselagens de aeronave, cascas de navio, mobília e artigos de vidro (ROGERS, 2001).

### 3.8.3 Definição e propriedades das Curva de Bézier

Uma curva de Bézier que é um caso especial de uma curva de *NURBS* é determinada por um polígono de controle, como mostrado na Figura 13 .

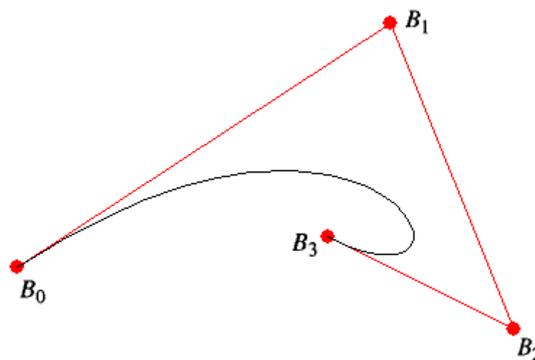


Figura 13: Pontos de controle de uma curva de Bézier

Matematicamente, uma curva de Bézier paramétrica, é definida por:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t), \quad 0 < t < 1 \quad (3.23)$$

em que a base de Bézier, ou Bernstein, é dada por

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad 0^0 \equiv 1 \quad (3.24)$$

para

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \quad (3.25)$$

Os vértices do polígono de Bézier são numerados de 0 a  $n$ , como mostrado na Figura 13 (ROGERS, 2001).

### 3.8.4 Curvas B-Spline

Do ponto de vista matemático, uma curva gerada utilizando os vértices de um polígono de controle é dependente de algum método de interpolação ou aproximação. Este método é definido pela escolha da função de base. Como observado, na seção anterior, que a base de Bernstein produz curvas de Bézier geradas pela equação (3.23). Duas características da base de Bernstein, no entanto, limitam a flexibilidade das curvas que dela resultam. Primeiro, o grau do polinômio gerado pelo vértice de controle, pode ser muito alto. Por exemplo, uma curva cúbica é definida por um polígono com quatro vértices e três segmentos de reta. Um polígono com seis vértices, sempre produz uma curva de quinto grau. A única maneira de reduzir o grau da curva é reduzindo o número de vértices. E inversamente, a única maneira de aumentar o grau do polinômio da curva é aumentando o número de vértices do polígono de controle. A segunda característica é a limitação ao que se deve à natureza global da base de Bernstein. Isto significa que o valor da função  $J_{n,i}(t)$  dada pela eq. (3.24) é diferente de zero, para todos os valores dos parâmetros, que são calculados através da curva inteira. Isso ocorre porque qualquer ponto de uma curva de Bézier é resultante da combinação dos valores, de todos os vértices de controle. Uma mudança de um vértice é sentida, na curva inteira. Isto elimina a capacidade de fazer uma mudança local dentro de uma curva. Por exemplo, a mudança de posição de um vértice de controle altera a forma, de uma curva de Bézier, como um todo. Isso se deve à natureza global da base de Bernstein. Essa falta de controle local é prejudicial, em algumas aplicações. Há outra base, chamada de base *B-spline*, que contém a base de Bernstein como um caso especial. Esta base é geralmente não global. Esse comportamento das curvas *B-spline* é devido ao fato de que cada vértice é associado a uma única base, associada a um subconjunto de vértice do polígono de controle. Deste modo, cada vértice afeta a forma de uma curva apenas, sobre uma certa gama de parâmetros que a define; em que sua fun-

ção de base associada é diferente de zero. A base *B-spline* também permite a alteração da ordem da função de base e, conseqüentemente, o grau da curva resultante curva, sem alterar o número de vértices do polígono de controle, Figura 14. A teoria das *B-splines* foi sugerida pela primeira vez por Schoenberg (Schoenberg, 1946). A definição recursiva, aplicada à base *B-spline* para a definição da curva é útil para a computação numérica e foi independentemente descoberta por Cox (Cox, 1971) e por de Boor (de Boor, 1972), ver (Riesenfeld, 1973), (Gordon e Riesenfeld, 1974).

### 3.8.4.1 Definição de Curva de B-Spline

Seja  $P(t)$  o vetor posição ao longo da curva, como uma função do parâmetro  $t$ . Uma curva B-spline é determinada por

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad . \quad (3.26)$$

Para  $t_{min} \leq t \leq t_{max}$  e  $2 \leq k \leq n + 1$ . Onde os  $B_i$  são os vetores posição dos  $n + 1$  vértices do polígono de controle, e  $N_{i,k}$  são as bases *B-spline* normalizadas. Para a  $i$ th base *B-spline* normalizada de ordem  $k$  (grau  $k - 1$ ), a base  $N_{i,k}(t)$  é definida por

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & x_i < t < x_{i+1} \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (3.27)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad . \quad (3.28)$$

Os valores de  $x_i$  são elementos de um vetor de nós que satisfaz a relação  $x_i \leq x_{i+1}$ . O parâmetro varia de  $t_{min}$  a  $t_{max}$  ao longo da curva  $P(t)$ . Por convenção, adota-se  $\frac{0}{0} = 0$ .

Formalmente, uma curva de *B-spline* está definida como uma função *spline polinomial* de ordem  $k$  (grau  $k - 1$ ), porque satisfaz as duas seguintes condições:

- $P(t)$  é um polinômio de grau  $k - 1$  em cada intervalo  $x_i < t < x_{i+1}$ .
- $P(t)$  e suas derivadas de ordem  $1, 2, \dots, k - 2$  são todas contínuas na curva inteira.

Assim, uma curva *B-spline* de quarta ordem é uma curva cúbica no intervalo  $x_i < t < x_{i+1}$  (ROGERS, 2001).

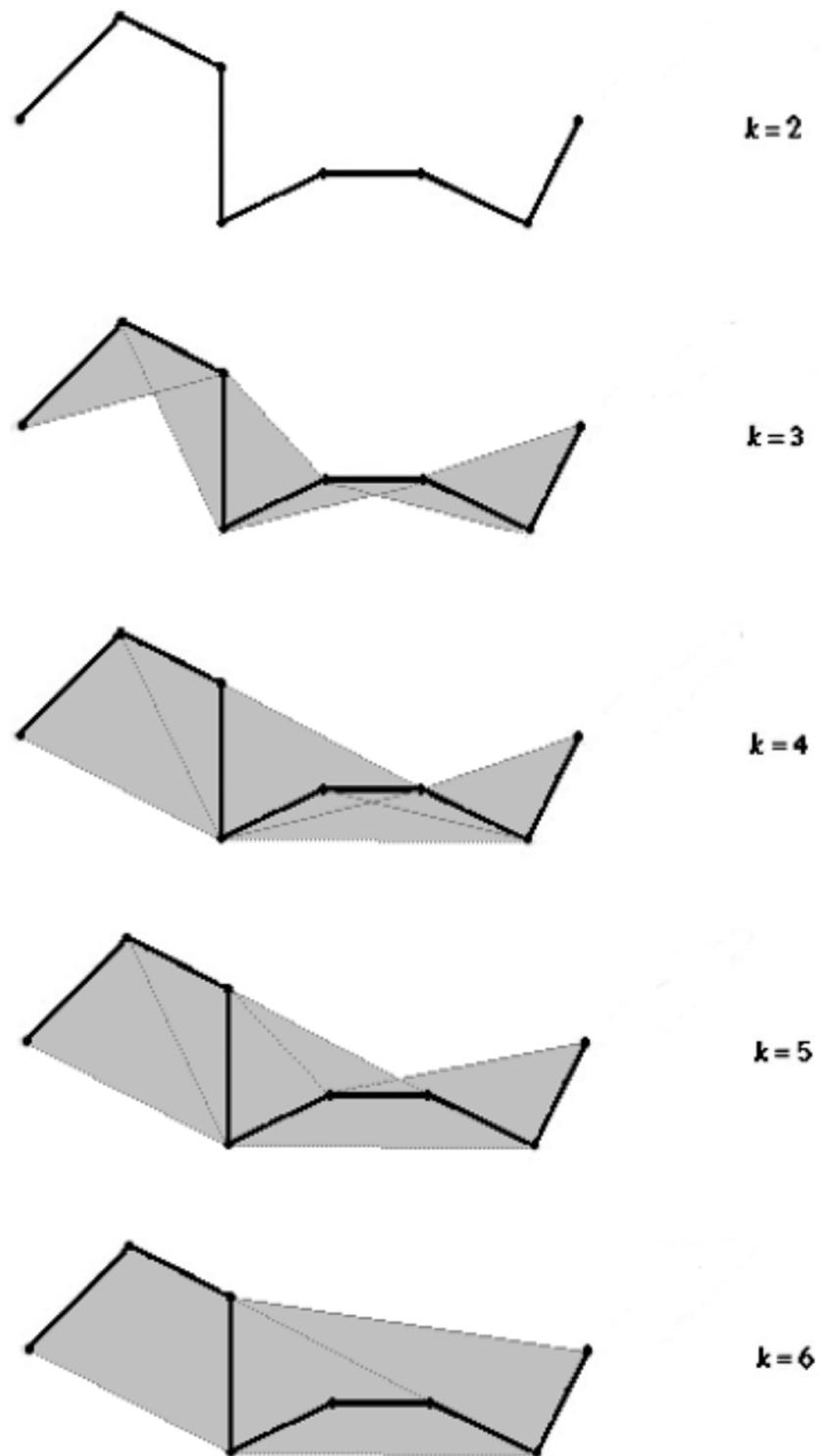


Figura 14: Propriedades da casca convexa das curvas B-Spline

### 3.8.5 Curvas B-Spline Racionais

As descrições de curva e superfície racional foram introduzidas na literatura de computação gráfica por Steve Coons (Coons, 1967). As formas Racionais de curvas de Bézier são bem conhecidas na literatura (Forrest, 1968; Forrest, 1980; Boehm, 1982; Farouki e Hinds, 1985; Piegl, 1986). Formas racionais das seções cônicas também são bem conhecidas (Ball, 1977). As curvas *B-splines* racionais proporcionam uma forma matemática precisa e capaz de representar formas como linhas comuns, aviões, curvas cônicas, inclusive círculos, curvas de livre-forma, quadráticas e superfícies esculpidas - que são usadas em computação gráfica. Atualmente, curvas e superfícies *NURBS* (*B Spline Racionais Não Uniformes*) são o padrão para a descrição de curvas e superfícies, na computação gráfica. *Versprille* (Versprille, 1975) foi o primeiro a discutir acerca das curvas *B-splines* racionais, e os artigos de *Tiller* (Tiller, 1983) and *Piegl and Tiller* (Piegl e Tiller, 1987) formam a base das discussões atuais. De forma bastante interessante, as curvas *B-splines* racionais não uniformes estão no padrão *Initial Graphics Exchange Specification (IGES)* desde 1983 (IGES, 1986). Além disso, *B-splines* racionais não uniformes (*NURBS*) são incorporados, na maioria, aos atuais sistemas de modelagem geométrica.

#### 3.8.5.1 Definição de Curvas B-Spline Não Uniformes

A curva *B-spline* racional é a projeção de uma curva *B-spline* não racional (polinômio), definida em coordenadas de quatro dimensões (4D), no espaço físico tridimensional (3D). Especificamente

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^h N_{i,k}(t) , \quad (3.29)$$

onde o  $B_i^h$ 's são os vértices de polígono de controle homogêneo de quatro dimensões para curva *B-spline* não racional de quatro dimensões.  $N_{i,k}(t)$  é a base *B-spline* não racional previamente dado nas Eqs. 3.28. Projetando de volta para o espaço tridimensional, divide-se, através de coordenadas homogêneas, a curva *B-spline* racional

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) , \quad (3.30)$$

em que os  $B_i$ 's são os vértices do polígono de controle para a curva *B-spline* racional, e

$$P(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (3.31)$$

são as funções base *B-spline* racionais, com  $h_i \leq 0$ ,  $\forall i$  (ROGERS, 2001).

### 3.8.6 Superfícies B-spline Racionais

Superfícies B-spline Racionais Não Uniformes, ou *NURBS*, são o padrão para a modelagem de superfícies, em grande parte da computação gráfica e projetos assistidos por computador. Muitos tipos de superfícies usadas em computação gráfica, tais como superfícies planas, quadradas, cilindros, esferas, elipsóides de revolução, bem como superfícies complexas e esculpidas, são fáceis e precisamente representadas por superfícies *B-spline* racionais. Assim, uma única descrição de superfície, com excelente controle local e global, pode ser usada em um sistema de modelagem ou projeto assistido por computador. Tornando desnecessário ter de lidar com múltiplas descrições, de tipos de superfície. Aqui nós tratamos superfícies *B-spline* racionais em geral. Tecnicamente, uma superfície *NURBS* é um caso especial de uma superfície *B-spline*, que usa uma forma particular de vetor nó. Para uma superfície *NURBS*, usa-se um vetor de nó, que pode ou não, ter valores de nós internos não-uniformes.

Um produto cartesiano de uma superfície *B-spline* racional homogênea de espaço de coordenadas de quatro dimensões é determinado por

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w) . \quad (3.32)$$

Em que  $B_{i,j}^h$  são os vértices do polígono de controle homogêneos, de quatro dimensões. E  $N_{i,k}(u)$  e  $M_{j,l}(w)$  são as funções base *B-spline* não racionais.

$$Q(u, w) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_{i,j}^h S_{i,j}(u, w) , \quad (3.33)$$

onde o  $B_{i,j}^h$ s são os vértices tridimensionais da rede de controle, e  $S_{i,j}(u, w)$  é a função base *B-spline* racional bivariada.

$$S_{i,j}(u, w) = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i1=1}^{n+1} \sum_{j1=1}^{m+1} h_{i1,j1} N_{i1,k}(u) M_{j1,l}(w)} = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{Sum(u, w)} , \quad (3.34)$$

em que

$$S(u, v) = \sum_{i1=1}^{n+1} \sum_{j1=1}^{m+1} h_{i1,j1} N_{i1,k}(u) M_{j1,l}(w) . \quad (3.35)$$

É conveniente, embora não necessário, assumir  $h_{i,j} \leq 0$  para todo o  $i, j$  (ROGERS, 2001).

## 4 Resultados

Como descrito na secção 3.8.1, os coeficientes da regressão polinomial foram determinados para cada vertical (de largura infinitesimal), onde as medidas da velocidade foram efetuadas, com posterior interpolação entre estes ajustes. Assim sendo, de cada coluna de medição, inicialmente toma-se uma faixa infinitesimal onde se estimam os valores das velocidades nas verticais mensuradas, como apresentado na Figura 12, para medidas efetuadas na manhã do dia 14/04/2008.

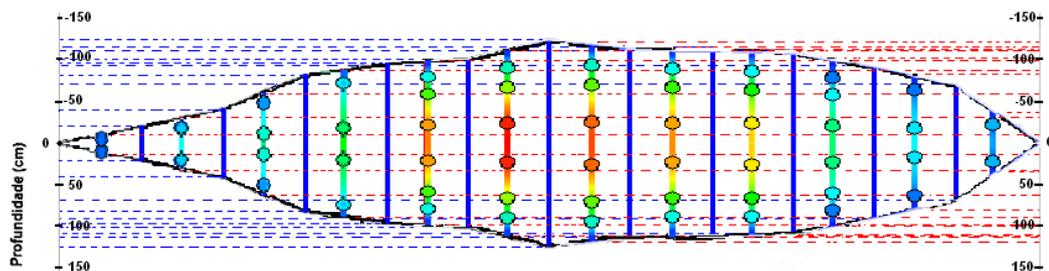
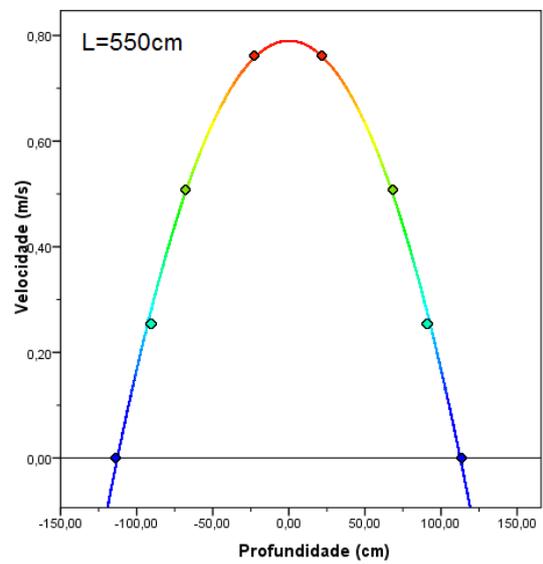
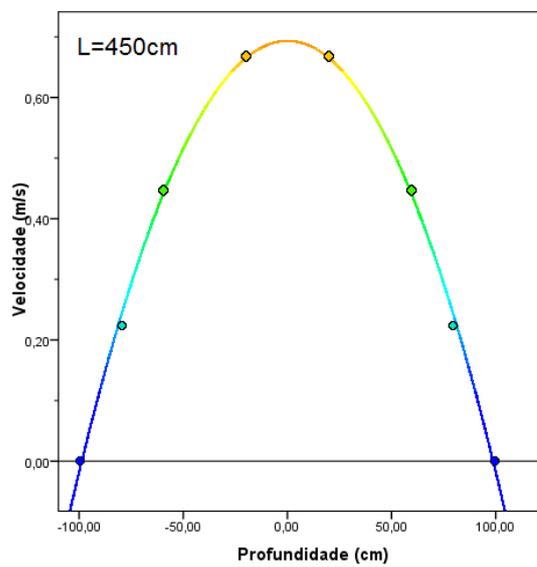
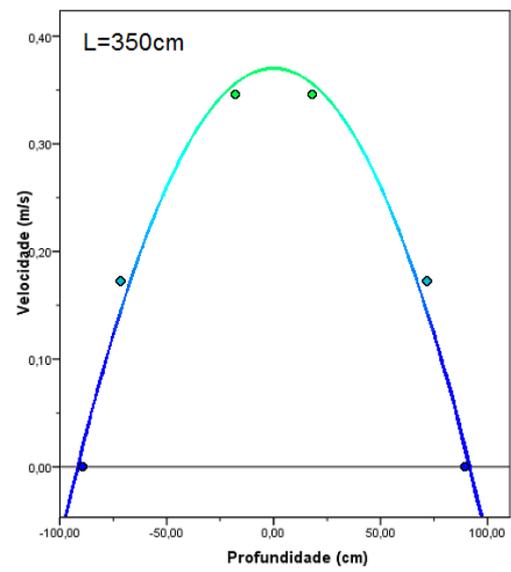
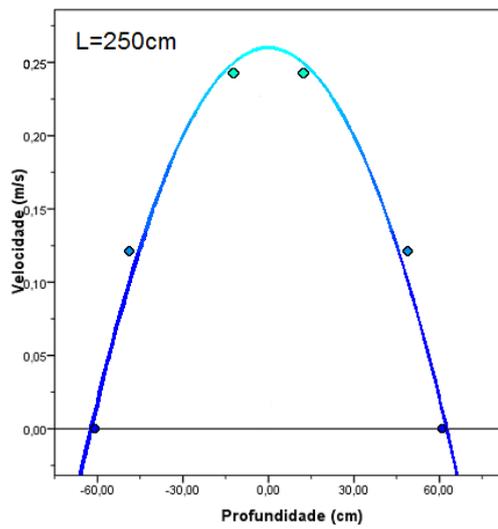
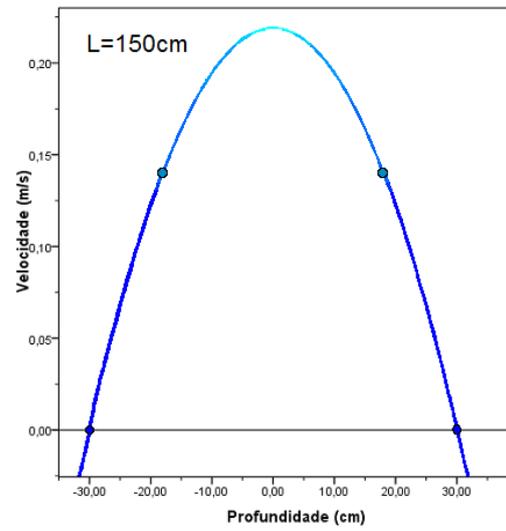
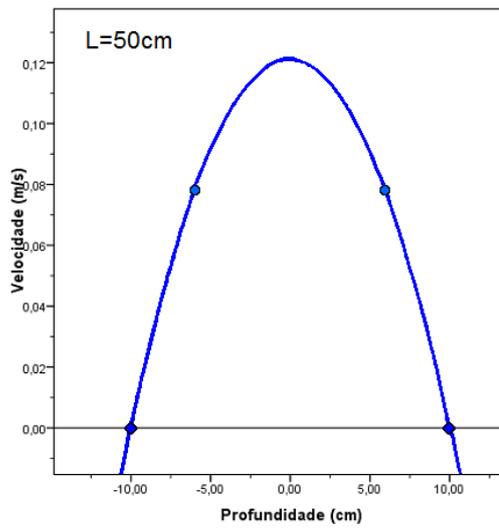


Figura 15: Representação esquemática do ajuste polinomial dos perfis da velocidade nas verticais, codificados em cores.

Ajustes polinomiais para todas as doze verticais da Figura 15 são apresentados na Figura 16, onde deveriam ser observadas escalas diferentes (utilizadas para enfatizar o desvio das curvas de ajuste dos pontos de medida). De forma qualitativa, da Figura 16 segue que os ajustes representam bem os pontos de medição, com um maior desvio para baixas velocidades nas verticais de  $250\text{cm}$ ,  $350\text{cm}$  e  $1050\text{cm}$ , que por outro lado tem menor contribuição para descarga total em comparação com verticais com velocidade maior.



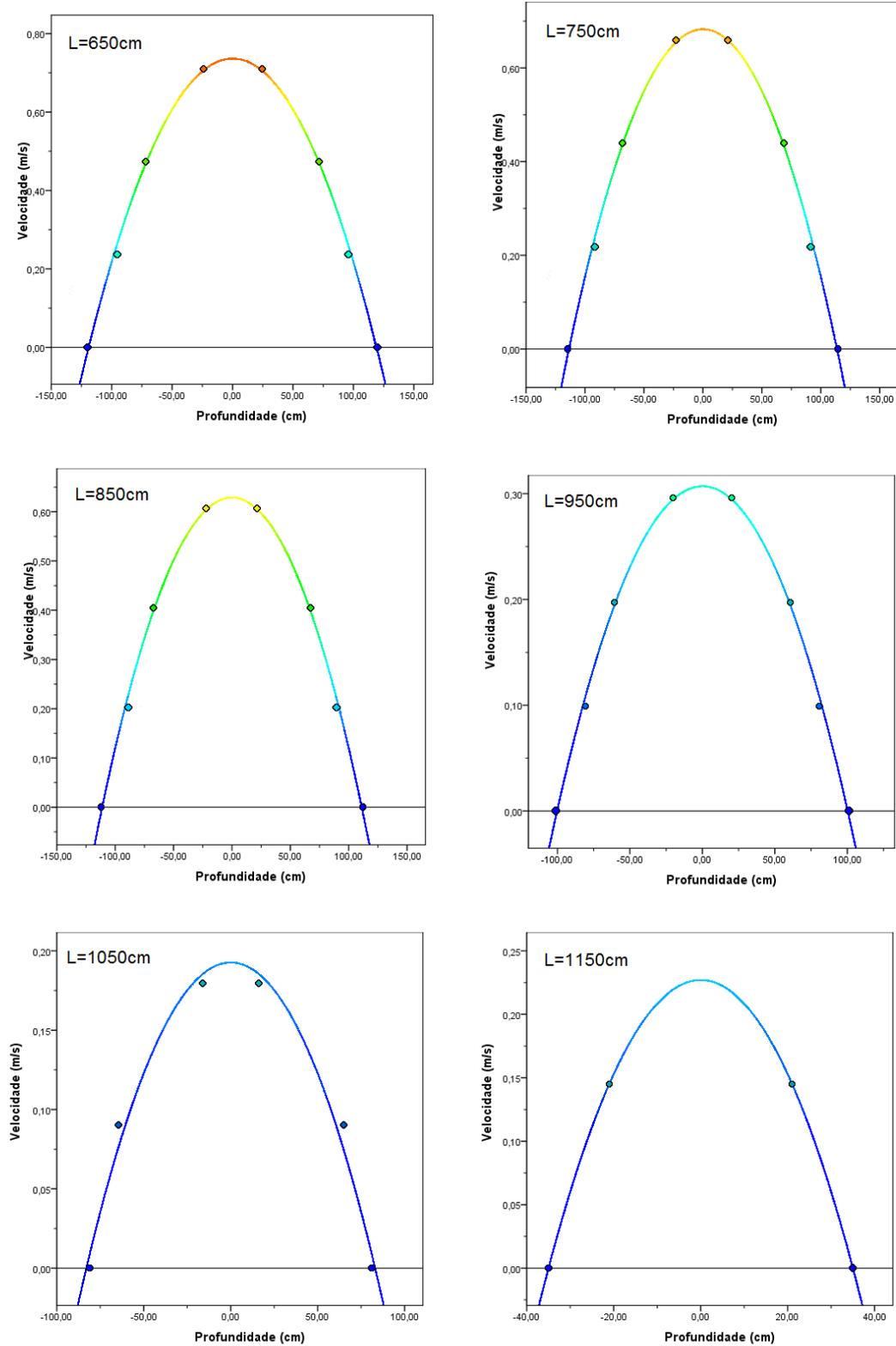


Figura 16: Parábolas de Mínimo Quadrado que estimam o perfil da velocidade nas verticais da Figura 15.

Os valores dos coeficientes de ajuste polinomial, obtidos pelo método de mínimos quadrados descrito na seção 3.7, para todas as verticais e medidas utilizadas neste trabalho, encontram-se listadas nas Tabelas 1-5. Para demonstrar a robustez do método atual em relação de remoção dos pontos de medição, nas Tabelas 1-5, também estão apresentados os resultados dos ajustes correspondentes à escolha de apenas quatro pontos da medida para cada campanha de mediação. Das Tabelas 1-5, é possível observar que os valores dos coeficientes  $b$  (lineares em profundidade) são praticamente zero em todos os casos, enquanto os valores dos coeficientes  $a$  (que correspondem a velocidade na superfície, ou velocidade máxima), variam pouco quando se comparam os ajustes com todos os pontos, aos ajustes com só quatro pontos de medição.

Tabela 1: Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 09/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros.

$L$	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950	1150	1250
Usando todos os 31 pontos de medida												
$a$	-6,355e-4	-1,155e-4	-7,770e-5	-5,412e-5	-5,787e-5	-5,270e-5	-4,610e-5	-4,614e-5	-4,071e-5	-3,637e-5	-4,869e-5	-2,986e-4
$b$	0	-1,11e-19	-7,90e-20	-6,53e-19	-1,03e-18	6,60e-20	-3,46e-20	-4,44e-19	0	-4,20e-19	-6,36e-19	0
$c$	0,53450	0,57760	0,84387	1,03745	1,27405	1,37084	1,32782	1,25254	1,05896	0,79009	0,62878	0,63175
$R^2_{Ajust}$	1,00	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	1,00
Usando apenas 4 pontos de medida												
$a$	-	-1,179e-4	-	-	-5,727e-5	-	-	-4,567e-5	-	-	-4,819e-5	-
$b$	-	0	-	-	0	-	-	0	-	-	0	-
$c$	-	0,56155	-	-	1,28007	-	-	1,25846	-	-	0,63175	-
$R^2_{Ajust}$	-	1,00	-	-	1,00	-	-	1,00	-	-	1,00	-

Tabela 2: Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 14/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros.

$L$	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950	1150	1250
Usando todos os 27 pontos de medida												
$a$	-1,211e-3	-2,432e-4	-6,647e-5	-4,401e-5	-7,109e-5	-6,226e-5	-5,191e-5	-5,285e-5	-5,089e-5	-3,056e-5	-2,797e-5	-1,853e-4
$b$	0	0	7,66e-20	3,20e-19	7,42e-19	-7,03e-19	6,05e-20	-9,73e-19	-6,42e-19	-2,31e-19	-1,24e-19	0
$c$	0,12114	0,21889	0,25971	0,37013	0,69330	0,79009	0,73632	0,68255	0,62878	0,30704	0,19268	0,22703
$R^2_{Ajust}$	1,00	1,00	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,98	0,98	0,98	0,97	1,00
Usando apenas 4 pontos de medida												
$a$	-	-	-6,786e-5	-	-	-6,162e-5	-	-5,231e-5	-	-3,024e-5	-	-
$b$	-	-	0	-	-	4,21e-19	-	0	-	0	-	-
$c$	-	-	0,25249	-	-	0,79383	-	0,68577	-	0,30849	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	1,00	-	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	-

Tabela 3: Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 15/04/08 - Manhã, com posição das verticais  $L$  em centímetros.

$L$	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950	1150	1250
Usando todos os 25 pontos de medida												
$a$	-	-2,214e-4	-1,210e-4	-7,005e-5	-6,818e-5	-6,320e-5	-4,754e-5	-4,924e-5	-4,842e-5	-5,423e-5	-5,273e-5	-3,433e-4
$b$	-	0	-2,54e-19	3,96e-19	-3,67e-19	-2,61e-19	-2,87e-19	7,28e-19	4,98e-19	-8,28e-19	5,80e-20	0
$c$	-	0,08855	0,30849	0,45905	0,53198	0,62878	0,52123	0,49972	0,46746	0,41368	0,25226	0,25962
$R^2_{Ajust}$	-	1,00	1,00	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	1,00
Usando apenas 4 pontos de medida												
$a$	-	-	-	-7,151e-5	-	-6,255e-5	-	-4,874e-5	-	-5,367e-5	-	-
$b$	-	-	-	0	-	0	-	-2,65e-19	-	0	-	-
$c$	-	-	-	0,44629	-	0,63175	-	0,50208	-	0,41564	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	-

Tabela 4: Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 15/04/08 - Tarde, com posição das verticais  $L$  em centímetros.

$L$	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950	1150	1250
Usando todos os 15 pontos de medida												
$a$	-	-	-4,339e-5	-5,242e-5	-4,518e-5	-5,161e-5	-5,342e-5	-5,663e-5	-5,263e-5	-6,374e-5	-	-
$b$	-	-	0	0	3,96e-19	2,29e-19	-3,05e-19	2,52e-19	9,40e-20	0	-	-
$c$	-	-	0,20757	0,33062	0,38001	0,47880	0,43929	0,41953	0,31086	0,21074	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	0,95	0,97	0,96	0,97	0,96	0,96	0,96	1,00	-	-
Usando apenas 4 pontos de medida												
$a$	-	-	-4,429e-5	-	-4,612e-5	-	-5,453e-5	-	-5,373e-5	-	-	-
$b$	-	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-
$c$	-	-	0,20181	-	0,36946	-	0,42708	-	0,30222	-	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	-	-

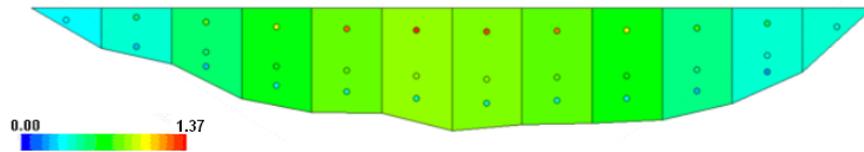
Tabela 5: Coeficientes da equação da parábola  $v = ax^2 + bx + c$ , para dados coletados no riacho Exu no dia 16/04/08 - Tarde, com posição das verticais  $L$  em centímetros.

$L$	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950	1150	1250
Usando todos os 15 pontos de medida												
$a$	-	-	-4,470e-5	-5,380e-5	-4,621e-5	-5,164e-5	-5,342e-5	-5,596e-5	-5,165e-5	-6,346e-5	-	-
$b$	-	-	0	-7,96e-20	-2,05e-19	-3,29e-19	-6,91e-20	-2,45e-19	-9,53e-20	-1,66e-19	-	-
$c$	-	-	0,20757	0,33062	0,38001	0,46892	0,42941	0,40965	0,30098	0,20260	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	0,95	0,97	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	1,00	-	-
Usando apenas 4 pontos de medida												
$a$	-	-	-4,563e-5	-	-4,717e-5	-	-5,453e-5	-	-5,272e-5	-	-	-
$b$	-	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-
$c$	-	-	0,20181	-	0,36946	-	0,41748	-	0,29262	-	-	-
$R^2_{Ajust}$	-	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	1,00	-	-	-

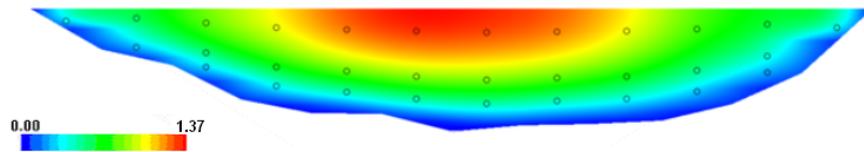
Os resultados de interpolação linear e não-linear (pelo método *NURBS*) como descrito na secção 3.8, estão apresentados nas Figuras 17-21, para todas as campanhas de medida abordadas neste trabalho, comparadas com os resultados do método tradicional área velocidade. De forma qualitativa, pode-se observar que os resultados de interpolação linear estão bastante semelhantes aos resultados de interpolação pelo método *NURBS*, apesar do fato que estão menos "lisos", porque a primeira derivada do perfil interpolado da velocidade, não tem continuidade na direção horizontal.

Também, os resultados obtidos com o uso de apenas quatro pontos de medida qualitativamente estão bastante semelhantes aos resultados com o uso de todos os pontos, o que demonstra a robustez do método atual, e sugere a possibilidade de uma substancial economia nas medidas, sem grande perda de precisão.

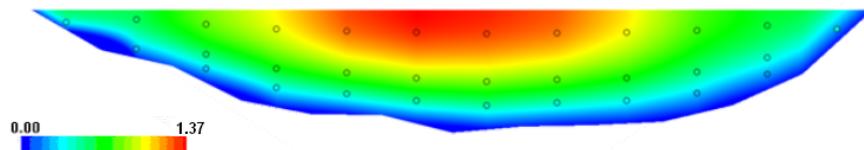
A) Método área-velocidade padrão:



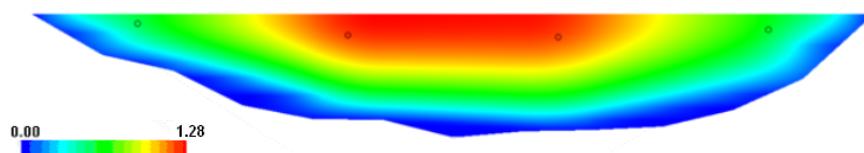
B) *NURBS* com todos os 31 pontos:



C) Interpolação linear com todos os 31 pontos:



D) *NURBS*, usando apenas 4 pontos:



E) Interpolação linear, usando só 4 pontos:

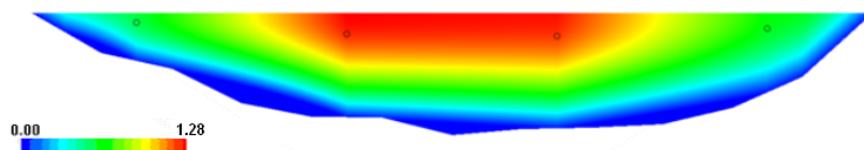
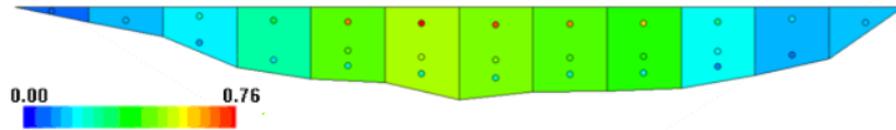
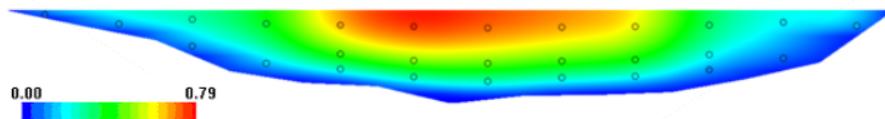


Figura 17: Cálculo da descarga do riacho Exu (09/04/08 - Manhã) em  $m^3/s$ , usando diversos métodos.

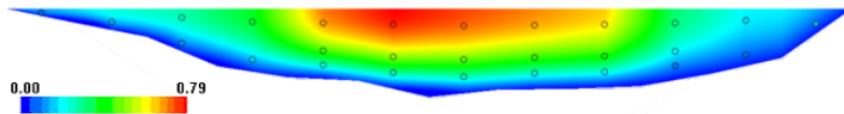
A) Método área-velocidade padrão:



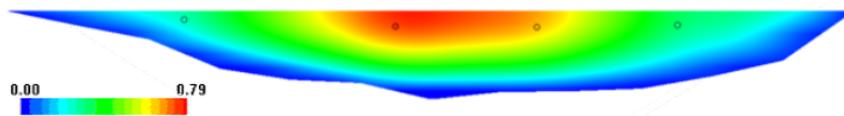
B) *NURBS* com todos os 27 pontos:



C) Interpolação linear com todos os 27 pontos:



D) *NURBS*, usando apenas 4 pontos:



E) Interpolação linear, usando só 4 pontos:

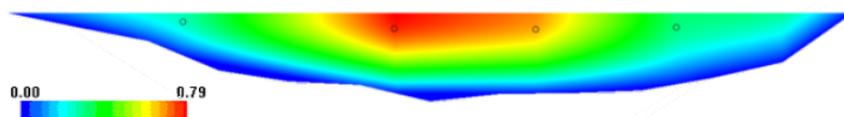
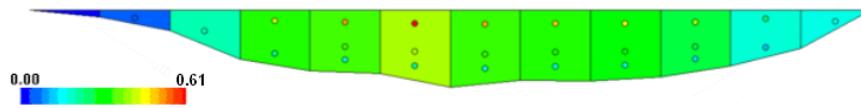
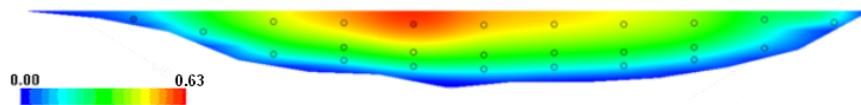


Figura 18: Cálculo de descarga do riacho Exu (14/04/08 - Manhã) em  $m^3/s$ , usando diversos métodos.

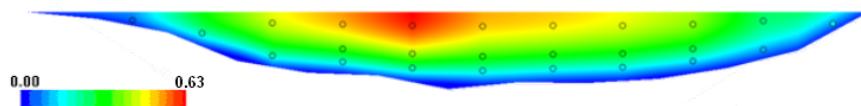
A) Método área-velocidade padrão:



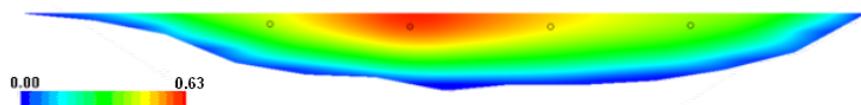
B) *NURBS* com todos os 25 pontos:



C) Interpolação linear com todos os 25 pontos:



D) *NURBS*, usando apenas 4 pontos:



E) Interpolação linear, usando só 4 pontos:

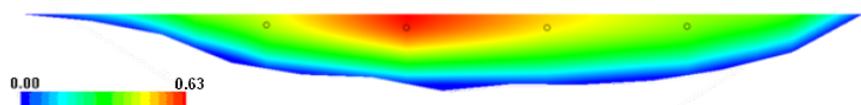
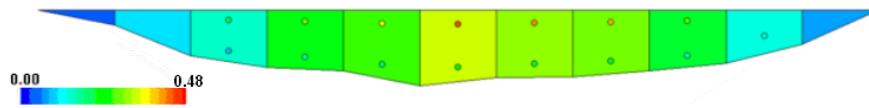
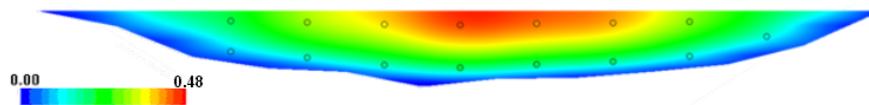


Figura 19: Cálculo de descarga do riacho Exu (15/04/08 - Manhã) em  $m^3/s$ , usando diversos métodos.

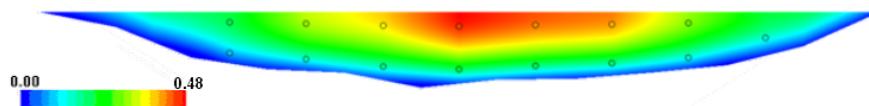
A) Método área-velocidade padrão:



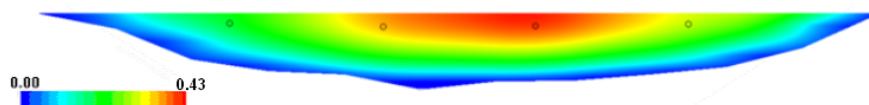
B) *NURBS* com todos os 15 pontos:



C) Interpolação linear com todos os 15 pontos:



D) *NURBS*, usando apenas 4 pontos:



E) Interpolação linear, usando só 4 pontos:

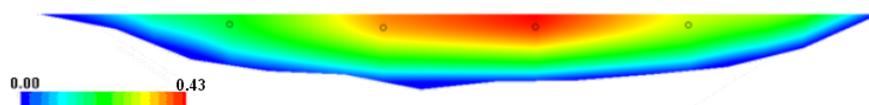
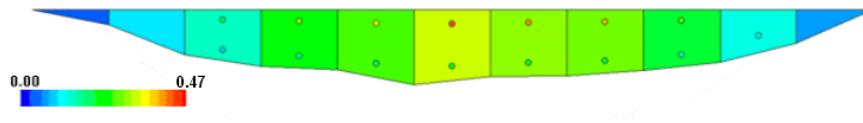
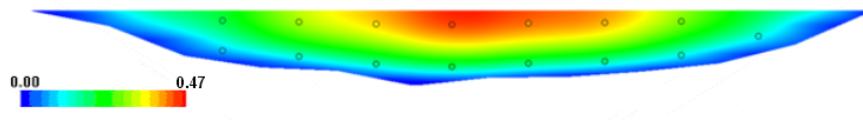


Figura 20: Cálculo de descarga do riacho Exu (15/04/08 - Tarde) em  $m^3/s$ , usando diversos métodos.

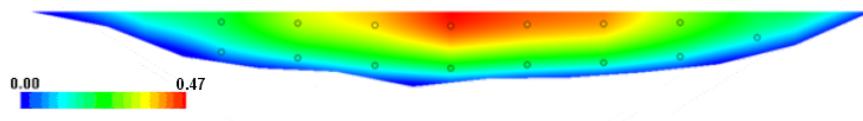
A) Método área-velocidade padrão:



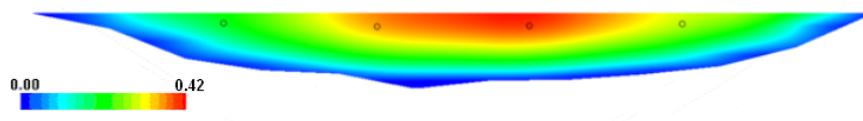
B) *NURBS* com todos os 15 pontos:



C) Interpolação linear com todos os 15 pontos:



D) *NURBS*, usando apenas 4 pontos:



E) Interpolação linear, usando só 4 pontos:

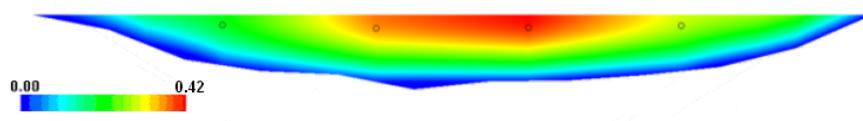


Figura 21: Cálculo de descarga do riacho Exu (16/04/08 - Tarde) em  $m^3/s$ , usando diversos métodos.

Os valores da estimativa de descarga líquida pelas duas formas de interpolação, usando todos os pontos de medida ou apenas quatro pontos, estão comparados com os valores obtidos pelo método tradicional área-velocidade estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Cálculo da descarga de uma seção do riacho Exu pelo método tradicional área-velocidade, e diversas formas de interpolação contínua. Valores em azul representam desvios relativos em relação aos resultados obtidos por método área-velocidade.

	Data e Turno de Aferição				
	09/04/08- Manhã	14/04/08- Manhã	15/04/08- Tarde	15/04/08- Manhã	16/04/08- Tarde
Método área-velocidade	9,34 m <sup>3</sup> /s	3,30 m <sup>3</sup> /s	1,59 m <sup>3</sup> /s	2,45 m <sup>3</sup> /s	1,62 m <sup>3</sup> /s
Interpolação NURBS todos os pontos	9,94 m <sup>3</sup> /s +6,42%	3,31 m <sup>3</sup> /s +0,30%	1,58 m <sup>3</sup> /s -0,63%	2,47 m <sup>3</sup> /s +0,82%	1,51 m <sup>3</sup> /s -6,79%
Interpolação linear todos os pontos	9,97 m <sup>3</sup> /s +6,74%	3,33 m <sup>3</sup> /s +0,91%	1,61 m <sup>3</sup> /s +1,26%	2,49 m <sup>3</sup> /s +1,63%	1,55 m <sup>3</sup> /s -4,32%
Interpolação NURBS (Apenas 4 pontos)	9,97 m <sup>3</sup> /s +6,47%	3,16 m <sup>3</sup> /s -4,24%	1,42 m <sup>3</sup> /s -10,69%	2,52 m <sup>3</sup> /s +2,86%	1,35 m <sup>3</sup> /s -16,67%
Interpolação linear (Apenas 4 pontos)	9,28 m <sup>3</sup> /s -0,64%	3,20 m <sup>3</sup> /s -3,03%	1,44 m <sup>3</sup> /s -9,43%	2,57 m <sup>3</sup> /s +4,90%	1,38 m <sup>3</sup> /s -14,81%

Os desvios relativos às diversas formas de interpolação em relação ao método tradicional área velocidade, apresentados em azul na Tabela 6, variam entre 0,3% e 17%. Por outro lado, os resultados de interpolação com superfície NURBS usando todos os pontos de medida (segunda linha da Tabela 6) poderão ser adotados como valores "verdadeiros", levando em conta que este método tem melhores propriedades matemáticas de continuidade (este método também é o mais computacionalmente intensivo de todos aqui abordados). Neste caso, os desvios relativos aos outros métodos testados aqui, encontram-se entre 0,3% e 10,6%, como mostrado na Tabela 6.

Estes valores deverão ser comparados com os valores da incerteza do método área velocidade, como especificado pelo padrão internacional ISO 1088:2007 e descrito na seção 3.3, apresentados na última linha da Tabela 7. Estes valores foram calculados usando as regras estabelecidas pela norma ISO 1088:2007 para as componentes de incerteza, usando as fórmulas 3.2 e 3.3 para  $k = 2$ , com intervalo de confiança de 95%.

Tabela 7: Mesmos dados apresentados na Tabela 6, com desvios relativos (em azul) em relação aos resultados obtidos por interpolação *NURBS*, usando todos os pontos de medida.

	Data e Turno de Aferição				
	09/04/08- Manhã	14/04/08- Manhã	15/04/08- Tarde	15/04/08- Manhã	16/04/08- Tarde
Método área-velocidade	9,34 m <sup>3</sup> /s -6,04%	3,30 m <sup>3</sup> /s -0,30%	1,59 m <sup>3</sup> /s 0,63%	2,45 m <sup>3</sup> /s -0,81%	1,62 m <sup>3</sup> /s 7,28%
Interpolação <i>NURBS</i> todos os pontos	9,94 m <sup>3</sup> /s	3,31 m <sup>3</sup> /s	1,58 m <sup>3</sup> /s	2,47 m <sup>3</sup> /s	1,51 m <sup>3</sup> /s
Interpolação linear todos os pontos	9,97 m <sup>3</sup> /s +0,30%	3,33 m <sup>3</sup> /s +0,60%	1,61 m <sup>3</sup> /s +1,90%	2,49 m <sup>3</sup> /s +0,81%	1,55 m <sup>3</sup> /s +2,65%
Interpolação <i>NURBS</i> (Apenas 4 pontos)	9,97 m <sup>3</sup> /s +0,30%	3,16 m <sup>3</sup> /s -4,53%	1,42 m <sup>3</sup> /s -10,13%	2,52 m <sup>3</sup> /s +2,02%	1,35 m <sup>3</sup> /s -10,60%
Interpolação linear (Apenas 4 pontos)	9,28 m <sup>3</sup> /s -6,64%	3,20 m <sup>3</sup> /s -1,03%	1,44 m <sup>3</sup> /s -8,86%	2,57 m <sup>3</sup> /s +4,05%	1,38 m <sup>3</sup> /s -1,09%
Incerteza pelo padrao ISO 1088	8,7%	8,9%	11,2%	9,4%	11,2%

Pelo exposto, pode-se concluir que os resultados calculados com o uso de apenas quatro pontos com o método numérico proposto neste trabalho, propiciam o grau de precisão da estimativa de descarga compatível com os outros tratamentos que usam todos os dados de medidas disponíveis neste trabalho, sugerindo que uma economia substancial poderia ser atingida sem perda substancial de precisão.

## 5 Conclusões

O método proposto apresentado gera uma representação mais “lisa” do perfil da velocidade na seção como um todo, este procedimento se mostrou surpreendentemente robusto em relação à remoção dos pontos da medida, uma vez que a utilização de apenas quatro pontos de medida oferece nível de precisão de estimativa de vazão semelhante ao resultado obtido pelo método tradicional área-velocidade com e.g. todas as medições. Claramente, isto representa um grande benefício em termos de redução do esforço físico e de custo.

Neste estudo foram utilizados os dados de cinco campanhas de medição no riacho Exu, Estado de Pernambuco, em abril de 2008 (Cunha Filho 2010). Os dados foram tratados pelo método tradicional área-velocidade e através do procedimento numérico proposto aqui, com interpolação linear entre os polinômios de ajuste das verticais, e interpolação não-linear através do método *NURBS*. Para todas as campanhas de medida também foram efetuados cálculos, usando apenas quatro pontos de medida. Estes últimos não se encaixam no intervalo de erro padrão estimado pela norma internacional ISO 1088:2007, quando se adota o resultado do método área-velocidade como valor verdadeiro, porém, ao se optar pelos resultados de interpolação com superfície *NURBS*, usando todos os pontos de medida como valores "verdadeiros", os resultados obtidos por todos os outros métodos acabam por se encaixar no intervalo de erro.

## 6 Recomendações

Estudos adicionais com dados de elevada precisão (com maior número de verticais, maior número de medidas em diversas profundidades da cada vertical, repetição das medidas das velocidades pontuais, e prolongado tempo de medição da cada velocidade pontual) são necessários para estabelecer o grau de precisão que pode ser atingido com um certo número reduzido das medidas, bem como o número mínimo das medidas e sua posição na seção vertical, necessário para atingir um certo grau desejado de precisão. Em particular, estudos futuros deverão ser conduzidos com método *Monte Carlo* a fim de otimizar o procedimento de medição e, ao mesmo tempo, minimizar a razão custo/benefício.

Finalmente, o *software* escrito em linguagem *C* para aplicação do método atual (bem como versões futuras que surjam das pesquisas de aplicação do método MCMC para otimização do procedimento da medição da descarga), com interface gráfica (*Graphical User Interface*) para plataforma *Windows*, será disponibilizado para a comunidade científica em nível internacional, com intenção de possibilitar a experimentação e comparação do método atual com os outros métodos existentes.

## APÊNDICE A

Neste apêndice, apresentamos tabelas com as medições das velocidades do riacho Exu, para os dias-turno: 09/04/2008 - Manhã ; 14/04/2008 - Manhã ; 15/04/2008 - Manhã ; 15/04/2008 - Tarde e 16/04/2008 - Tarde (CUNHA-2010). Pelo método apresentado na seção 2.2.

Riacho Exu 09/04/08 manhã							
Pontos de medição							
Profundidade lateral (cm)	Profundidade central (cm)	S	0,2P	0,4P	0,6P	0,8P	Velocidade Média (m/s)
0							
58	29	*	*	*	<b>0,34</b>	*	0,342
80	69	*	<b>0,54</b>	*	*	<b>0,27</b>	0,404
130	105	*	<b>0,81</b>	*	<b>0,54</b>	<b>0,27</b>	0,543
149	139,5	*	<b>1</b>	*	<b>0,67</b>	<b>0,33</b>	0,667
150	149,5	*	<b>1,23</b>	*	<b>0,82</b>	<b>0,41</b>	0,819
175	162,5	*	<b>1,32</b>	*	<b>0,88</b>	<b>0,44</b>	0,882
167	171	*	<b>1,28</b>	*	<b>0,85</b>	<b>0,43</b>	0,854
165	166	*	<b>1,21</b>	*	<b>0,81</b>	<b>0,4</b>	0,805
160	162,5	*	<b>1,02</b>	*	<b>0,68</b>	<b>0,34</b>	0,681
137	148,5	*	<b>0,76</b>	*	<b>0,51</b>	<b>0,25</b>	0,508
92	114,5	*	<b>0,61</b>	*	<b>0,4</b>	<b>0,2</b>	0,404
0	46	*	*	*	<b>0,4</b>	*	0,404

Riacho Exu 15/04/08 manhã							
Pontos de medição							
Profundidade lateral (cm)	Profundidade central (cm)	S	0,2P	0,4P	0,6P	0,8P	Velocidade Média (m/s)
0							
20	10	*	*	*	<b>0,08</b>	*	0,078
40	30	*	*	*	<b>0,14</b>	*	0,140
82	61	*	<b>0,24</b>	*	*	<b>0,12</b>	0,182
97	89,5	*	<b>0,35</b>	*	*	<b>0,17</b>	0,259
102	99,5	*	<b>0,67</b>	*	<b>0,45</b>	<b>0,22</b>	0,446
125	113,5	*	<b>0,76</b>	*	<b>0,51</b>	<b>0,25</b>	0,508
115	120	*	<b>0,71</b>	*	<b>0,47</b>	<b>0,24</b>	0,474
114	114,5	*	<b>0,66</b>	*	<b>0,44</b>	<b>0,22</b>	0,439
110	112	*	<b>0,61</b>	*	<b>0,4</b>	<b>0,2</b>	0,404
92	101	*	<b>0,3</b>	*	<b>0,2</b>	<b>0,1</b>	0,197
70	81	*	<b>0,18</b>	*	*	<b>0,09</b>	0,135
0	35	*	*	*	<b>0,15</b>	*	0,145

Riacho Exu 15/04/08 manhã							
Pontos de medição							
Profundidade lateral (cm)	Profundidade central (cm)	S	0,2P	0,4P	0,6P	0,8P	Velocidade Média (m/s)
0							
10	5	*	*	*	*	*	*
30	20	*	*	*	<b>0,06</b>	*	0,057
71	50,5	*	*	*	<b>0,2</b>	*	0,197
87	79	*	<b>0,43</b>	*	*	<b>0,21</b>	0,321
91	89	*	<b>0,51</b>	*	<b>0,34</b>	<b>0,17</b>	0,342
110	100,5	*	<b>0,61</b>	*	<b>0,4</b>	<b>0,2</b>	0,404
101	105,5	*	<b>0,5</b>	*	<b>0,34</b>	<b>0,17</b>	0,335
102	101,5	*	<b>0,48</b>	*	<b>0,32</b>	<b>0,16</b>	0,321
96	99	*	<b>0,45</b>	*	<b>0,3</b>	<b>0,15</b>	0,301
80	88	*	<b>0,4</b>	*	<b>0,27</b>	<b>0,13</b>	0,266
55	67,5	*	<b>0,24</b>	*	*	<b>0,12</b>	0,177
0	27,5	*	*	*	<b>0,17</b>	*	0,166

---

**Riacho Exu 15/04/08 tarde**


---

## Pontos de medição

Profundidade lateral (cm)	Profundidade central (cm)	S	0,2P	0,4P	0,6P	0,8P	Velocidade Média (m/s)
0							
20	10	*	*	*	*	*	*
60	40	*	*	*	*	*	*
75	67,5	*	<b>0,19</b>	*	*	<b>0,1</b>	0,145
80	77,5	*	<b>0,31</b>	*	*	<b>0,15</b>	0,231
99	89,5	*	<b>0,35</b>	*	*	<b>0,18</b>	0,266
89	94	*	<b>0,45</b>	*	*	<b>0,22</b>	0,335
88	88,5	*	<b>0,41</b>	*	*	<b>0,21</b>	0,308
80	84	*	<b>0,39</b>	*	*	<b>0,2</b>	0,294
70	75	*	<b>0,29</b>	*	*	<b>0,15</b>	0,218
45	57,5	*	*	*	<b>0,13</b>	*	0,135
0	22,5	*	*	*	*	*	*

---

**Riacho Exu 16/04/08 tarde**


---

## Pontos de medição

Profundidade lateral (cm)	Profundidade central (cm)	S	0,2P	0,4P	0,6P	0,8P	Velocidade Média (m/s)
0							
20	10	*	*	*	*	*	*
59	39,5	*	*	*	*	*	0
74	66,5	*	<b>0,19</b>	*	*	<b>0,1</b>	0,145
79	76,5	*	<b>0,31</b>	*	*	<b>0,15</b>	0,231
98	88,5	*	<b>0,35</b>	*	*	<b>0,18</b>	0,266
88	93	*	<b>0,44</b>	*	*	<b>0,22</b>	0,328
87	87,5	*	<b>0,4</b>	*	*	<b>0,2</b>	0,301
80	83,5	*	<b>0,38</b>	*	*	<b>0,19</b>	0,287
69	74,5	*	<b>0,28</b>	*	*	<b>0,14</b>	0,211
44	56,5	*	*	*	<b>0,13</b>	*	0,130
0	22	*	*	*	*	*	*

## Referências

- ANA (Agência Nacional de Águas), <http://www.ana.gov.br>, ultimo acesso Abril, 2010.
- Ball, A.A., *Consurf I-III, CAD*, Vol. 6, pp. 243-249, 1974; Vol. 7, pp. 237-242, 1975; Vol. 9, pp. 9-12, 1977.
- Boehm, W., *On cubics: A survey, Comput. Graph. and Image Process.*, Vol. 19, pp. 201-226, 1982.
- Buchann, T.J., Somers, W.P. *Discharge measurement at gaging stations. U.S. Geological Survey, USGS-TWRI, Book 3, Ch. A8, 1969.*
- Coe, M.T., Costa, M.H., Botta, A., Birkett, C. *Long-term simulations of discharge and floods in the Amazon Basin: Large-scale biosphere-atmosphere experiment in Amazonia (LBA). Journal of Geophysical Research*, v. 107, pp. LBA 11.1-LBA 11.17, 2002.
- Coons, S. *Surfaces for computer-aided design of spaceforms, MIT Proj. MAC, MAC-TR-41, 1967. (Also as AD 663 504).*
- Cox, M.G. *The numerical evaluation of B-splines, National Physical Laboratory DNAC 4, 1971.*
- Cunha Filho, M. 2010. *Tese de doutorado, Estudo da Produção de Sedimentos na Bacia Hidrográfica e da Resistência Aluvial do Riacho Exu, no Semi-Árido do Nordeste do Brasil. UFRPE, Recife, Brasil, 2010.*
- de Boor, C. *On calculation with B-splines, Jour. Approx. Theory*, v. 6, pp. 50-62, 1972.
- Farouki, R., and Hinds, J. *A hierarchy of geometric forms, IEEE Comput. Graph. and Appl.*, v. 5, pp. 51-78, 1985.
- Forrest, A.R. *"Curves and Surfaces for Computer-aided Design," Ph.D. dissertation, Cambridge University, 1968.*
- Forrest, A.R., *he twisted cubic curve: A computer aided geometric design approach, CAD*, v. 12, pp. 165-172, 1980.
- Froehner, S., Fernandes Martins, R., Errera, M.R. *Assessment of fecal sterols in Barigui River sediments in Curitiba, Brazil. Environmtal Monitoring and Assessment*, v. 157, pp. 591-600, 2009.
- Gordeev, V.V. *Fluvial sediment flux to the Arctic Ocean, Geomorphology*, v. 89, pp. 94-104, 2006.
- Gordon, W.J. and Riesenfeld, R.F., *Bernstein-B6zier methods for the computer aided design of free-form curves and surfaces, J. A CM*, v. 21, pp. 293- 310, 1974.

Horowitz, A.J. An evaluation of sediment rating curves for estimating suspended sediment concentration for subsequent flux calculation. *Hydrol. Process.* v.17, pp. 3387-3409. 2003.

Iges "Initial Graphics Exchange Specifications, Version 3.0," Doe. No. NBSIR 86-3359 Nat. Bur. of Stds., Gaithersburg, MD, 1986.

ISO 2007 a (International Organization for Standardization), Hydrometry – Measurement of liquid flow in open channels using current-meters or floats, ISO 748:2007.

[http://www.iso.org/iso/catalogue\\_detail.htm?csnumber=37573](http://www.iso.org/iso/catalogue_detail.htm?csnumber=37573)

ultimo acesso Abril, 2010.

ISO 2007 b (International Organization for Standardization), Hydrometry – Velocity-area methods using current-meters – Collection and processing of data for determination of uncertainties in flow measurement, ISO 1088:2007.

[http://www.iso.org/iso/catalogue\\_detail.htm?csnumber=37096](http://www.iso.org/iso/catalogue_detail.htm?csnumber=37096) ultimo acesso Abril, 2010.

Landau, L.D., Lifshitz, E.M. *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course in Theoretical Physics)*, Pergamon Press, 1987.

Ludwig, W., Probst, J.L. River sediment discharge to the oceans; present day controls and global budgets. *American Journal of Science*, v. 218, pp. 265-295, 1998.

Ouillon, S. Erosion et transport solide: ampleur et enjeux. *La Houille Blanche*, v. 2, pp. 52-58. 1998.

Piegl, L. A geometric investigation of the rational B6zier scheme of computer aided design, *Comp. in Indus.*, v. 7, pp. 401-410, 1986.

Piegl, L., and Tiller, W., Curve and surface constructions using rational B-splines, *CAD*, v. 19, pp. 485-498, 1987.

Rantz, S.E. Measurement of stage and discharge. In: *Measurement and Computation of Streamflow*. U.S. Geological Survey Water-Supply paper 2175, v.1, 284p., 1982.

Riesenfeld, R.F., "Application of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design," Ph.D. dissertation, Syracuse University Syracuse, NY, 1972. Also available as University of Utah UTEC-CSc-73-126, March 1973.

Rogers, D. F., *An introduction to NURBS : with historical perspective*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.

Schoenberg, I.J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Q. Appl. Math.*, v. 4, pp. 45-99; pp. 112-141, 1946.

Simões, S. J. C., Coiado, E.M. Métodos de Estimativa da Produção de Sedimentos em Pequenas Bacias Hidrográficas, in: *Hidrologia Aplicada à Gestão de Pequenas Bacias Hidrográficas*, Org. por de Paiva, J.B.D. e de Paiva, E.M.C.D., Porto Alegre: ABRH. pp. 365-394. 2001.

Spiegel, M. R., *Estatística: resumo da teoria*. Tradução de Cosentino, P., McGraw-Hill do Brasil, 1976.

Tiller, W., Rational B-splines for curve and surface representation, *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, v. 3, pp. 61-69, 1983.

USGS (U.S. Geological Survey), <http://md.water.usgs.gov>, ultimo acesso Abril, 2010.

Walling, D.E., Fang, D. Recent trends in the suspended sediments loads in the world rivers. *Global Planetary Change*, v. 39, pp. 111-126, 2003.

Wang, C.U. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review Fluid Mechanics*, v. 23, pp. 159-177, 1991.

Versprille, K.J., "Computer-aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form," Ph.D. dissertation, Syracuse University, Syracuse, NY, 1975.

Williams, G.P. Sediment concentration versus water discharge during single hydrologic events in rivers. *J. Hydrol.* , v.111, pp. 89-106. 1989.