

Marcella Feitosa dos Santos

# Sobre a teoria das variedades digitais de Evako

Recife  
Janeiro de 2017



Marcella Feitosa dos Santos

## Sobre a teoria das variedades digitais de Evako

Dissertação submetida para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida em 01/02/2017. Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Wilson Rosa de Oliveira Junior

Recife

Janeiro de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S237s Santos, Marcella Feitosa dos  
Sobre a teoria das variedades digitais de Evako / Marcella  
Feitosa dos Santos. – 2017.  
94 f. : il.

Orientador: Wilson Rosa de Oliveira Junior.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de  
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e  
Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2017.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Espaço digital 2. Variedade digital 3. Teoria dos Grafos  
4. Homotopias I. Oliveira Junior, Wilson Rosa de, orient.  
II. Título

CDD 310

Marcella Feitosa dos Santos

## Sobre a teoria das variedades digitais de Evako

Dissertação submetida para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida em 01/02/2017. Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Recife, Janeiro de 2017:

---

**Wilson Rosa de Oliveira Junior**  
Orientador

---

**Adenilton José da Silva**

---

**Cícero Carlos Ramos de Brito**

Recife  
Janeiro de 2017



*Dedicado à todos que utilizam a prática como critério da verdade.*



# Agradecimentos

À minha família, minha mãe, Marcia Feitosa, lhe sou mais do que grata por todo amor, dedicação, acolhimento e respeito. Sem você nada disso teria sido possível, inclusive todo apoio e amparo que sempre tive em seus braços. Te amo! À meu pai, Everaldo Feitosa, pelo amor, afeto e o respeito por minhas escolhas. Mesmo sem ter clara a ideia do significado de minha escolha por “estudar mais” sempre me deu força e acreditou que as coisas dariam certo. À meu irmão Eduardo Henrique, pelo carinho, respeito e diversão nos momentos que pudemos estar juntos ao longo dessa árdua jornada. Vocês são as pessoas mais incríveis e espero retribuir todo o empenho que vocês me dedicaram.

À Antonio pelo companheirismo, afeto, generosidade e compreensão nos momentos em que precisei. Nada teria dado certo sem você por perto, muito obrigada.

Aos parentes e amigos, próximos e distantes, pela torcida pra que tudo andasse bem. Parece que deu certo...

Ao professor Rodrigo Gondim, meu orientador na graduação, que me incentivou a querer ir além.

Aos professores, colegas e demais trabalhadores do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, pelo acolhimento e condições recebidas para conclusão desta etapa da vida acadêmica.

Ao professor Wilson pela confiança em meu potencial, a ajuda para desatar os nós que foram aparecendo e por ser me ensinar os primeiros passos do ofício de pesquisador.

À Marcelo Amorim, orientando do professor Wilson, pelo desenvolvimento do *Software*.

À Adenilton e Cícero por aceitarem dedicar o tempo de vocês a leitura e elaboração das críticas/sugestões ao trabalho. Tudo foi muito valioso.

À CAPES pela concessão das bolsas, permitindo minha total dedicação às atividades do Mestrado.



*“Temos o direito de ser iguais quando a nossa diferença nos inferioriza;  
e temos o direito de ser diferentes quando a nossa igualdade nos descaracteriza.*

*Daí a necessidade de uma igualdade que reconheça as diferenças  
e de uma diferença que não produza, alimente ou reproduza as desigualdades.”*

*Boaventura de Souza Santos*



# Resumo

No processamento de imagens digitais, o espaço e as imagens precisam ser representáveis discretamente, em geral, tais imagens são manipuladas com técnica da Matemática contínua, via aproximações. No desenvolvimento do nosso trabalho trazemos uma abordagem em que é possível desenvolver uma topologia e uma geometria que possam realizar representações discretas diretamente sem a necessidade das aproximações.

Para a construção desta Topologia Digital tomamos como base a Teoria de Grafos Contráteis de Evako e partimos para o estudo dos Espaços e das Variedades Digitais.

A partir disso, traremos conceitos e exemplos de Espaços Digitais interessantes: as Esferas e Variedades Digitais. Por fim, apresentamos duas Homotopias especiais entre Variedades Digitais:  $R$ -Transformação e Compressão. Ambas as operações modificam a quantidade de vértices e arestas dos espaços digitais, mas preservam seus aspectos topológicos. Um importante fato é que a Característica de Euler de um espaço digital é um invariante topológico preservado por ambas homotopias.

**Palavras-chaves:** Espaço Digital, Variedade Digital, Teoria dos Grafos, Homotopia.



# Abstract

In the processing of digital images, space and images need to be discretely representable. In general, such images are manipulated with continuous mathematical technique, via approximations. In the development of our work we have an approach where it is possible to develop a topology and a geometry that can perform discrete representations directly without the necessary approximations.

For the construction of this Digital Topology we take as basis the Evako's Theory of Contractible Graphs and set out for the study of Spaces and Digital Manifold.

From this, we will bring concepts and examples of interesting Digital Spaces: Spheres and Digital Manifolds. Finally, we present two special Homotopies between Digital Manifolds: R-Transformations and Compression. Both operations modify the amount of vertices and edges of digital spaces, but preserve their topological aspects. An important fact is that the Euler characteristic of a digital space is a topological invariant preserved by both homotopy.

**Key-words:** Digital Spaces, Digital Manifold, Graph Theory, Homotopy.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplos espaços moleculares. . . . .	22
Figura 2 – Exemplos de grafos de interseção. . . . .	22
Figura 3 – Diferentes ilustrações para o problema das Sete Pontes de Königsberg. . . . .	23
Figura 4 – Rotulações para o problema das Sete Pontes de Königsberg. . . . .	23
Figura 5 – Ilustração de um passeio pelo esquema das Pontes de Königsberg. . . . .	24
Figura 6 – Representações para diferentes tipos de grafos. . . . .	25
Figura 7 – Exemplos de grafos simples. . . . .	25
Figura 8 – Possível rotulação de vértices. . . . .	26
Figura 9 – Exemplos de subgrafos induzidos. . . . .	26
Figura 10 – Exemplos de caminhos. . . . .	27
Figura 11 – Exemplos de grafos do tipo linha e ciclo. . . . .	28
Figura 12 – Exemplos de grafos completos. . . . .	28
Figura 13 – Exemplos de grafos roda. . . . .	28
Figura 14 – Exemplos de árvore e floresta. . . . .	29
Figura 15 – Exemplos de grafos bipartidos completos. . . . .	29
Figura 16 – Exemplo de um grafo estrela. . . . .	30
Figura 17 – Exemplos de curvas. . . . .	31
Figura 18 – Exemplos de superfícies. . . . .	31
Figura 19 – Ilustração da deformação do toro em uma xícara. . . . .	32
Figura 20 – Grafo utilizado em algumas definições ao longo do Capítulo. . . . .	35
Figura 21 – Ilustração da operação diferença. . . . .	36
Figura 22 – Ilustração da operação diferença. . . . .	36
Figura 23 – Exemplos da operação soma entre grafos. . . . .	37
Figura 24 – Exemplo da associatividade da operação soma. . . . .	37
Figura 25 – Exemplos de borda e bola de um vértice. . . . .	39
Figura 26 – Exemplos de borda e bola de um vértice. . . . .	39
Figura 27 – Ilustração da investigação se $K_2$ é contrátil. . . . .	40
Figura 28 – Ilustração da investigação de um grafo contrátil. . . . .	41
Figura 29 – Ilustração da investigação se $K_3$ é contrátil. . . . .	41
Figura 30 – Ilustração da investigação se $K_4$ é contrátil. . . . .	41
Figura 31 – Ilustração da investigação se $v_1 \oplus L_3$ é contrátil. . . . .	41
Figura 32 – Ilustração da investigação de um grafo não contrátil. . . . .	42
Figura 33 – Exemplos de grafos contráteis. . . . .	42
Figura 34 – Exemplos de grafos contráteis. . . . .	42
Figura 35 – Exemplos de grafos contráteis. . . . .	42

Figura 36	– Ilustração da contratibilidade de $K_2$ .	43
Figura 37	– Vizinhanças.	44
Figura 38	– Ilustração do Axioma 1.	45
Figura 39	– Ilustração do Axioma 1.	46
Figura 40	– Exemplo de grafo do tipo cone.	47
Figura 41	– Grafos do tipo roda são do tipo cone.	48
Figura 42	– Exemplos de curvas em $E^3$ , com seus respectivos espaços moleculares e grafos de interseção.	58
Figura 43	– Exemplos de diferentes espaços moleculares que possuem grafos de interseção isomorfos.	58
Figura 44	– Exemplos de espaços cúbicos $Q^2$ e $Q^3$ .	59
Figura 45	– Exemplos de espaços cúbicos.	59
Figura 46	– Ilustração de como proceder para obter encolhimento de letras no plano.	60
Figura 47	– Exemplos de esferas digitais.	63
Figura 48	– Exemplos de discos digitais.	63
Figura 49	– Ilustração de fronteira e interior de discos digitais.	64
Figura 50	– Ilustração de $S^0 \oplus S^0 = S^1$ .	64
Figura 51	– Os subespaços contráteis de uma $S^1$ são grafos do tipo linha.	66
Figura 52	– Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Toro digital.	67
Figura 53	– Vizinhança de um vértice no 2-Toro Digital.	67
Figura 54	– Vizinhança de um vértice no 2-Toro Digital.	68
Figura 55	– Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Plano Projetivo digital.	68
Figura 56	– Vizinhanças de vértices no 2-Plano Projetivo digital.	68
Figura 57	– Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Bitoro digital.	69
Figura 58	– Vizinhança de um vértice no 2-Bitoro digital.	69
Figura 59	– Verificação que a vizinhança é uma 1-esfera digital.	69
Figura 60	– Ilustração das etapas de uma $R$ -transformação.	71
Figura 61	– Etapas da $R$ -transformação em uma $S^2$ .	72
Figura 62	– Etapas da $R$ -transformação em uma $S^2$ .	72
Figura 63	– Etapas da $R$ -transformação em uma $S^2$ .	73
Figura 64	– Etapas da compressão de uma $S^2$ .	74
Figura 65	– Etapas da compressão de uma $S^2$ .	75
Figura 66	– Definições de vizinhança e bola de um vértice.	84
Figura 67	– Checar se um grafo é contrátil.	84
Figura 68	– Checar se um grafo é uma $n$ -esfera digital.	86
Figura 69	– Construção de uma $n$ -esfera digital minimal.	87
Figura 70	– Definição do disco digital, sua fronteira e seu interior.	88

# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão $n$
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\sum$	Somatório
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Interseção de conjuntos
$\subseteq$	Subconjunto
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\oplus$	Operador Soma
$-$	Operador Diferença
$ G $	Quantidade de vértices do grafo $G$
$O(v)$	Vizinhança do vértice $v$
$N(v)$	Bola do vértice $v$
$\dim(G)$	Dimensão do grafo $G$
$\chi(G)$	Característica de Euler do grafo $G$
$IntD$	Interior de $D$
$\partial D$	Fronteira de $D$
$S^n$	$n$ -esfera digital
$S_{min}^n$	$n$ -esfera digital minimal
$O(v)_G$	Vizinhança do vértice $v$ restrita ao grafo $G$



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>21</b>
	Introdução	21
<b>2</b>	<b>Noções Preliminares</b>	<b>23</b>
2.1	Teoria dos Grafos	23
2.1.1	Um pouco de História	23
2.1.2	Definições Fundamentais	24
2.1.3	Tipos de grafos	27
2.2	Variedades Topológicas	30
<b>3</b>	<b>Espaços Contráteis</b>	<b>35</b>
3.1	Espaços Digitais e Operações	35
3.2	Espaço Contrátil	39
3.3	Principais resultados a respeito de Contratibilidade	45
3.4	Característica de Euler	50
<b>4</b>	<b>Espaços Moleculares</b>	<b>57</b>
4.1	Espaços cúbicos	58
<b>5</b>	<b>Variedades Digitais</b>	<b>63</b>
5.1	Esferas Digitais	63
5.2	Variedades Digitais	66
5.2.1	Característica de Euler e Variedades Digitais	69
<b>6</b>	<b>Tranformações em uma <math>n</math>-variedade digital</b>	<b>71</b>
6.1	$R$ -Tranformações de $n$ -variedades digitais	71
6.2	Compressão de $n$ -variedades digitais	73
<b>7</b>	<b>Classificação de uma <math>n</math>-variedade digital</b>	<b>77</b>
7.1	Complexidade de uma $n$ -variedade digital	77
7.2	Algoritmo para classificação das $n$ -variedades digitais	77
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
8.1	<i>Software GraphManifold</i>	83
8.2	Trabalhos Futuros	89
	Referências	93



# 1 Introdução

Ao pensar em discretização de um modelo espacial é comum que muitos de nós imagine que em qualquer vizinhança ou região (limitada), existirá apenas um número finito de elementos. Portanto, o modelo deve ser no mínimo, localmente finito. Ao propor o estudo de modelos espaciais discretos, estamos admitindo a possibilidade que o espaço é finito, (SMYTH; WEBSTER, 2007).

Para o processamento de imagens digitais, tanto o espaço quanto as imagens precisam ser representados discretamente, portanto faz sentido desenvolver uma topologia e uma geometria que possam lidar com essas representações discretas, sem a necessidade de incorporá-las na representação tradicional contínua, como por exemplo, utilizando aproximações.

A principal abordagem a discretização utiliza estruturas em que uma relação binária é geralmente a adjacência de *pixels* (ECKHARDT; LATECKI, 2003), (CHEN; RONG, 2010), e por esse motivo torna-se conveniente a utilização de uma estrutura como a de grafos.

Suponha que  $S$  é uma superfície no espaço euclidiano  $E^n$ . Divida  $E^n$  em um conjunto de cubos unitários com coordenadas inteiras dos vértices, chamaremos de espaço molecular  $M_0$  a família de cubos unitários que intersectaram a superfície  $S$ . Em seguida reduziremos o tamanho da aresta do cubo de 1 para  $\frac{1}{2}$ , e obteremos o espaço molecular  $M_1$ . Depois utilizaremos o tamanho da aresta  $\frac{1}{3}$ , usando a mesma estrutura. Repetindo esta operação infinitamente, nós obtemos uma sequência de espaços moleculares  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  para a superfície  $S$ . Pode ser visto que existe o número  $p$  tal que para todo  $m, n, n > p, m > p$ , os espaços moleculares  $M_m$  e  $M_n$  podem ser transformados um no outro (IVASHCHENKO, 1993).

Se temos duas superfícies que são homotopicamente equivalentes,  $S_1$  e  $S_2$ , então seus espaços moleculares podem ser transformados um no outro por essas transformações se a divisão utilizada for suficientemente pequena. Isso nos sugere que um espaço molecular  $M$  é o análogo discreto de um espaço contínuo  $S$ .

Como os grafos surgem nessa abordagem? O fato é que qualquer espaço molecular pode ser representado pelo seu grafo de interseção, isto é, o grafo que tem como vértices cada um dos cubos unitários que constituem o espaço molecular e as arestas são as adjacências entre os cubos unitários. Tome como exemplo o espaço euclidiano  $E^2$  com um circunferência e um segmento de reta, o espaços moleculares  $M$  e  $N$  são respectivamente os quadrados que intersectam o circunferência e o segmento.

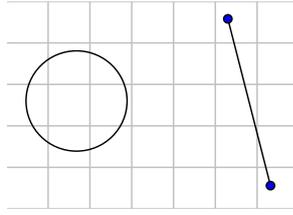


Figura 1: Exemplos espaços moleculares.

Os grafos de interseção de  $M$  e  $N$  são, respectivamente,

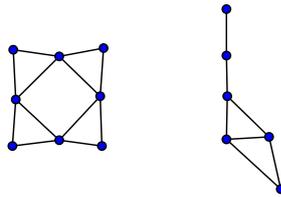


Figura 2: Exemplos de grafos de interseção.

Para a construção do grafo de interseção do espaço  $M$  são consideradas as adjacências de vértices e lados entre cada quadrado que contém alguma parte da circunferência. Analogamente foi construído o grafo de interseção para o segmento. Para o caso do espaço euclidiano  $E^2$ , cada quadrado pode ter no máximo 8 vizinhos, já para o espaço euclidiano  $E^3$ , cada cubo pode ter no máximo 26 vizinhos, e assim por diante.

Com isso, temos que qualquer espaço molecular  $M$  pode ser representado por seu grafo de interseção, que é denotado por  $G(M)$ , assim como todo grafo  $G$  pode ser representado por um espaço molecular  $M(G)$ , mas é preciso estar atento que mais de um espaço molecular pode ser representado pelo mesmo grafo.

Este trabalho reúne os trabalhos de *Evako*<sup>1</sup> em uma forma coesa e didática, fornecendo exemplos de conceitos abstratos e detalhando as demonstrações dos artigos originais. Assim, o texto servirá a uma audiência maior não necessariamente especialista em Topologia.

O ideia fundamental é que o grafo é um espaço, especificamente um grafo simples será chamado um espaço digital, e guarda em sua estrutura propriedades topológicas.

<sup>1</sup> Observação: Evako e Ivashchenko são a mesma pessoa, como ele é russo existem as duas formas diferentes de traduzir seu nome.

## 2 Noções Preliminares

### 2.1 Teoria dos Grafos

#### 2.1.1 Um pouco de História

O artigo escrito por *Leonhard Euler* publicado em 1736 é considerado o primeiro artigo na história da Teoria dos Grafos e trata do problema das *Sete Pontes de Königsberg*.

Na Figura 3 à esquerda temos o mapa de Königsberg na época de Euler mostrando a disposição real das sete pontes, na imagem central temos um “zoom” para ajudar a formular o problema e à direita temos uma representação gráfica que pode ser utilizada para solucionar o problema.

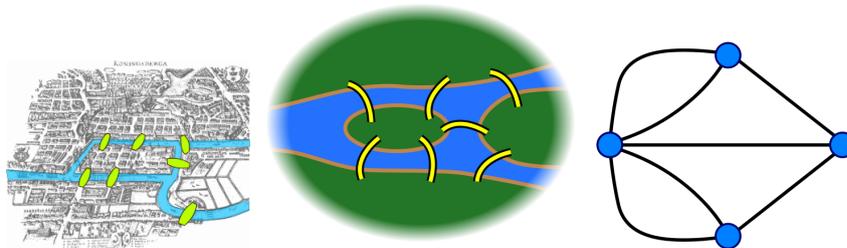


Figura 3: Diferentes ilustrações para o problema das Sete Pontes de Königsberg.

O desafio da época era planejar um passeio pela cidade que atravessasse cada ponte uma única vez, com a condição de que cada porção de terra só poderia ser alcançada através de uma ponte e cada ponte uma vez utilizada no percurso não poderia ser novamente utilizada, (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2003). Os pontos inicial e final não necessitam ser o mesmo.

Para facilitar a referência a cada porção de terra alcançada iremos rotulá-las por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , conforme mostram as representações abaixo.

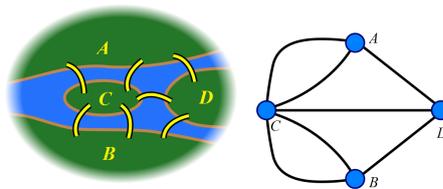


Figura 4: Rotulações para o problema das Sete Pontes de Königsberg.

Para ilustrar a solução do problema considere um passeio começando pela porção de terra  $A$ , utilizando uma ponte alcançando a porção  $D$ , depois  $C$ , retornando a porção

$A$  (aqui esgotamos todas as pontes que fazem alcançar a porção de terra  $A$ ), novamente alcançar  $C$ , depois a faixa  $B$  e alcançar  $D$ . Em síntese  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ . Quando fazemos todo o percurso descrito não podemos concluir o desafio pois para sair da porção  $D$  teríamos de repetir alguma das pontes já utilizadas, conforme mostrado na Figura 5.

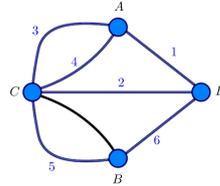


Figura 5: Ilustração de um passeio pelo esquema das Pontes de Königsberg.

O fato é que o caminho desejado com a exigência de não repetição das pontes, será impossível de ser realizado independente do ponto de partida. Perceba que a quantidade de pontes que incidem cada porção de terra o fazem em quantidade ímpar, isto implica que chegar e partir de uma porção sem repetir pontes deve acontecer aos pares. Esgotadas as possibilidades de ir e vir, conforme a exigência do problema, teremos chegado a uma porção de terra e não teremos como sair para alcançar outra porção de terra sem repetir alguma ponte. Note também que utilizando essa ideia acontecerá de alguma ponte não ser utilizada, como ocorreu no esquema apresentado na Figura 5.

### 2.1.2 Definições Fundamentais

Informalmente podemos entender por um **grafo** o esquema apresentado para solucionar o problema das Sete Pontes de Königsberg, um conjunto de “pontos” e “linhas” (geralmente representadas como segmentos de reta) que nos ajudam a representar, refletir e entender uma relação de conectividade, (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2003), (BONDY; MURTY, 2008). É importante atentar para o fato de que uma linha sempre é determinada por dois pontos, isto é, não pode existir uma linha que não tenha seu início e término em algum ponto do grafo. Com isso temos o conjunto das linhas definido como um subconjunto de dois elementos pertencentes ao conjunto de pontos do grafo.

Serão utilizados como referências para as principais definições desta seção: os livros *Graph theory*, (BONDY; MURTY, 2008) e *Matemática Discreta*, (LOVASZ; PELIKAN; VESZTERGOMBI, 2003).

De maneira geral, um grafo é um par  $G = (V, E)$ , com  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um conjunto finito não-vazio de **vértices**,  $E$  um conjunto de pares  $v_i v_j \in V \times V$ , chamados **arestas** e uma função de incidência, que associa a cada aresta do grafo um par não orde-

nado de vértices do grafo, (BONDY; MURTY, 2008). Os vértices que são extremidades de uma aresta não necessariamente precisam ser distintos.

Dizemos que dois vértices  $v_i, v_j \in V$  são **adjacentes** se a aresta  $v_i v_j \in E$ , (BONDY; MURTY, 2008). À medida que impomos condições para estabelecer relações de adjacência estaremos falando de diferentes tipos de grafos. Na Figura 6, temos na primeira representação um grafo que possui arestas múltiplas (dois vértices estão relacionados por mais de uma aresta) e laços (o vértice está relacionado com ele mesmo), no centro temos um grafo simples que detalharemos mais adiante e à direita um grafo direcionado (em que a relação de adjacência possui orientação).

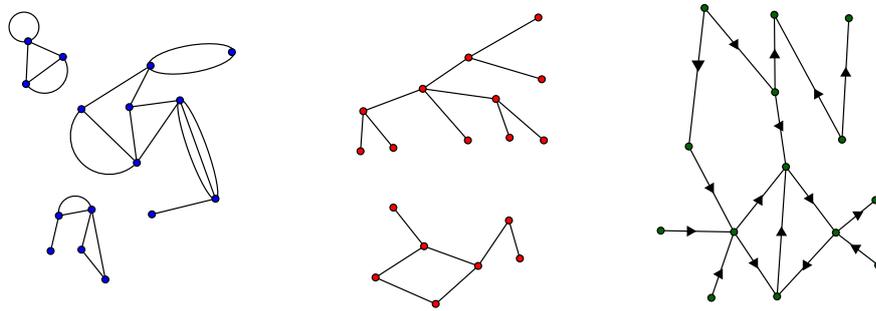


Figura 6: Representações para diferentes tipos de grafos.

**Definição 2.1.1.** Um **grafo simples**  $G = (V, E)$ , consiste em um conjunto finito (não vazio)  $V$  de **vértices**,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , e um conjunto  $E$  de pares não ordenados de elementos de  $V$ , chamados **arestas**, em que  $v_p v_p \notin E$  e dois vértices não podem estar conectados por mais de uma aresta. Utilizaremos  $|G|$  para denotar a quantidade de vértices do grafo  $G$ .

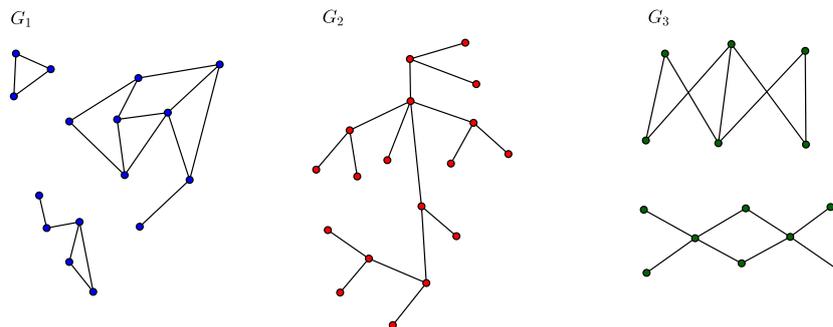


Figura 7: Exemplos de grafos simples.

Para os grafos simples, o conjunto  $E$  determina uma relação simétrica entre os elementos de  $V$ . Ela é chamada relação de adjacência. Na Teoria de Grafos dois grafos são equivalentes (ou isomorfos) quando existe uma bijeção  $f : V_1 \rightarrow V_2$  e esta bijeção preserva adjacências, (BONDY; MURTY, 2008). No nosso trabalho só estudaremos os grafos simples.

Podemos atribuir a cada vértice de um grafo um número (ou letra), para facilitar a compreensão de quando estamos nos referindo a cada um deles. Na Figura 8 apresentamos possíveis rotulações para os grafos  $G_1$  e  $G_2$ .

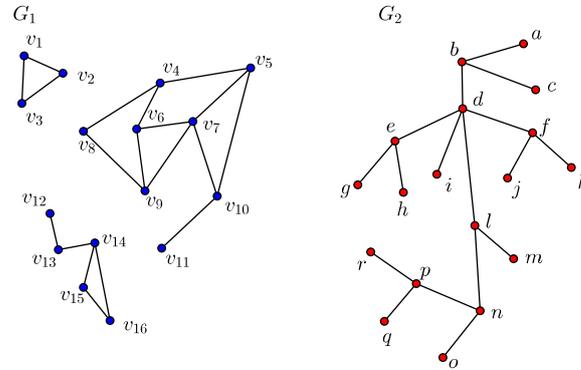


Figura 8: Possível rotação de vértices.

O **grau** de um vértice é o número de arestas que incidem nele. Por exemplo, no grafo  $G_1$  o vértice  $v_6$  possui grau 3.

Dizemos que  $H = (V_H, W_H)$  é **subgrafo induzido** de  $G = (V_G, W_G)$ ,  $V_H \subseteq V_G$ , se para qualquer par de vértices  $u_p$  e  $u_q$  de  $V_H$ ,  $u_p u_q$  é uma aresta de  $W_H$  se e somente se  $u_p u_q$  é uma aresta de  $W_G$ , (BONDY; MURTY, 2008).

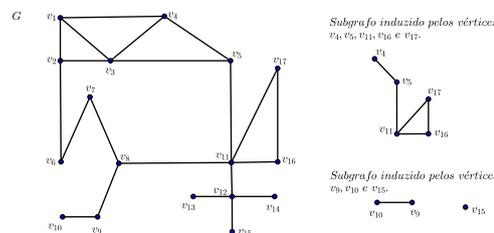


Figura 9: Exemplos de subgrafos induzidos.

**Definição 2.1.2.** (BONDY; MURTY, 2008) Um **caminho** em um grafo simples é um subgrafo cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência linear de tal forma que dois vértices são adjacentes se forem consecutivos na sequência e não são adjacentes de outra forma. O **comprimento** de um caminho é dado pelo número de arestas que percorremos para realizá-lo.

Podemos entender um caminho conectando dois vértices  $u$  e  $v$  de um grafo como uma sequência de vértices  $u = v_0, v_1, \dots, v_n = v$ , tal que apenas  $v_i, v_{i+1}$  são adjacentes,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Na figura abaixo ilustramos um caminho  $v_8, v_4, v_5, v_{10}, v_{11}$  conectando os vértices  $v_8$  e  $v_{11}$  do grafo  $G_1$ . Como passamos pelas arestas  $v_8 v_4, v_4 v_5, v_5 v_{10}, v_{10} v_{11}$ , temos que o

comprimento desse caminho é igual a 4. No grafo  $G_2$  temos ilustrado um caminho de comprimento 6 conectando os vértices  $a$  e  $q$ .

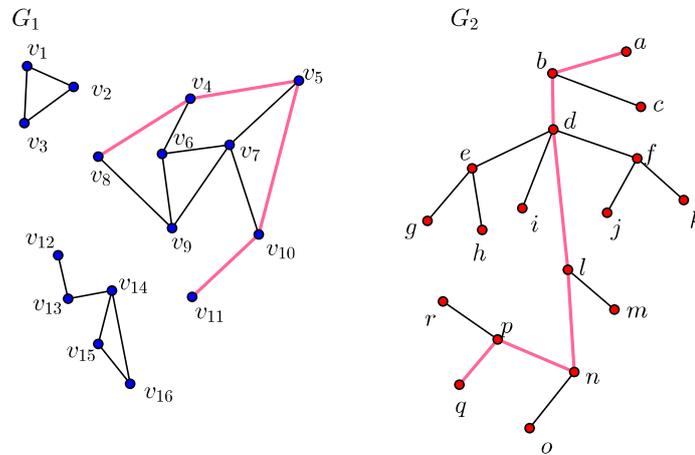


Figura 10: Exemplos de caminhos.

No grafo  $G_1$  alguns vértices não podem ser conectados por caminho. Por exemplo, não existe caminho conectando  $v_1$  e  $v_9$ . Já no grafo  $G_2$ , para quaisquer dois vértices, sempre temos um caminho os conectando. Observando essa característica, definimos:

**Definição 2.1.3.** Um grafo é dito **conexo** se para quaisquer dois vértices do grafo existir um caminho que os conecte. Caso contrário dizemos que o grafo é **desconexo** e cada parte conexa é chamada de **componente conexa**.

De posse da Definição 2.1.3, concluímos o grafo  $G_1$  é desconexo e possui três componentes conexas, já o grafo  $G_2$  é conexo.

### 2.1.3 Tipos de grafos

Por preservarem características semelhantes em relação às adjacências, os grafos conexos podem ser subdivididos em grupos, apresentaremos a seguir definições e exemplos dos principais tipos grafos que trataremos em nosso trabalho.

**Definição 2.1.4.** Um grafo  $G$  com  $n$  vértices será chamado **linha** se  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$  é um caminho.

**Definição 2.1.5.** Um grafo  $G$  com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , será chamado **ciclo** se  $u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v$  é um caminho cujos pontos inicial e final coincidem.

Nós denotaremos os grafos do tipo linha por  $L_n$  e os do tipo ciclo por  $C_n$ , abaixo temos a representação de um grafo  $L_7$  e de um grafo  $C_{10}$ .

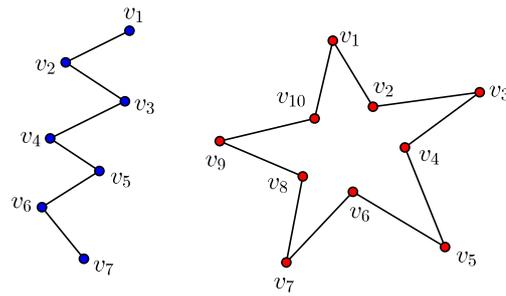


Figura 11: Exemplos de grafos do tipo linha e ciclo.

**Definição 2.1.6.** (BONDY; MURTY, 2008) Um grafo é chamado **completo** se cada um dos seus vértices está conectado a todos os outros.

Usaremos como notação  $K_n$ , para um grafo completo que possui  $n$  vértices. Na figura abaixo temos as representações dos grafos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ . Note que um vértice de um grafo do tipo  $K_n$  sempre possuirá grau  $n - 1$ .

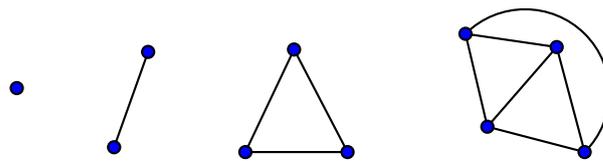


Figura 12: Exemplos de grafos completos.

**Definição 2.1.7.** Um grafo com  $n + 1$  vértices é dito **roda** se é formado por um único vértice conectado a todos os vértices de um grafo ciclo  $C_n$ .

Nós os denotaremos um grafo roda por  $W_n$ . Na Figura 13 temos representado um  $W_3$  e um  $W_{10}$ .

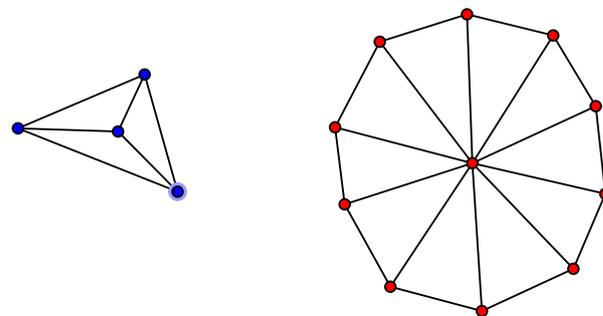


Figura 13: Exemplos de grafos roda.

**Definição 2.1.8.** (BONDY; MURTY, 2008) Um grafo  $G$ , é dito uma **árvore** se ele é conexo e acíclico (não possui como subgrafo um grafo do tipo ciclo). Caso o grafo seja

acíclico mas não conexo, ele é dito uma **floresta**. Em uma árvore cada vértice de grau 1 será chamado **folha**.

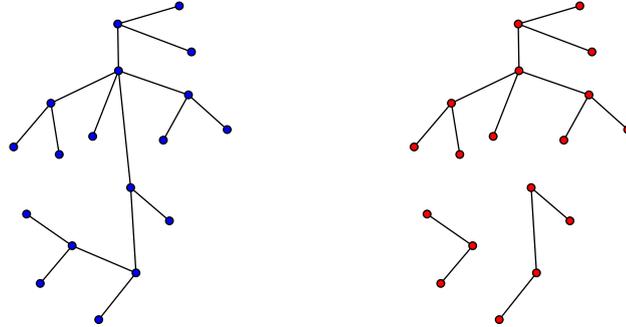


Figura 14: Exemplos de árvore e floresta.

Um grafo é dito é **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser dividido em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  de modo que cada aresta tem uma extremidade em  $V_1$  e uma extremidade em  $V_2$ , tal partição  $(V_1, V_2)$  é chamada uma bipartição do grafo, com  $V_1$  e  $V_2$  suas **partes**, (BONDY; MURTY, 2008).

**Definição 2.1.9.** (BONDY; MURTY, 2008) Um grafo bipartido completo,  $G = (V_1 \cup V_2, E)$ , com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , é um grafo bipartido tal que para quaisquer dois vértices,  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$ ,  $v_1v_2$  é uma aresta do grafo  $G$ .

O grafo bipartido completo com  $|V_1| = m$  e  $|V_2| = n$  será denotado por  $K_{m,n}$ . Na figura abaixo temos representados um  $K_{4,2}$  e um  $K_{2,2}$ .

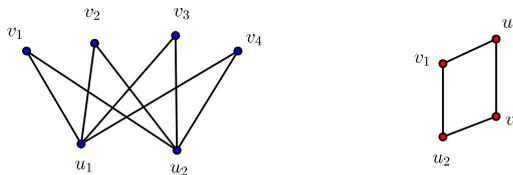


Figura 15: Exemplos de grafos bipartidos completos.

**Definição 2.1.10.** (BONDY; MURTY, 2008) Um grafo é do tipo **estrela** quando é um grafo bipartido completo, com  $|V_1| = 1$  ou  $|V_2| = 1$ .

Isto é existe um único vértice  $v$  conectado com todos os demais vértices, sendo esses não conectados entre si. Nós denotaremos um grafo estrela por  $S_n$ . Na figura abaixo temos a representação de um grafo  $S_{12}$ .

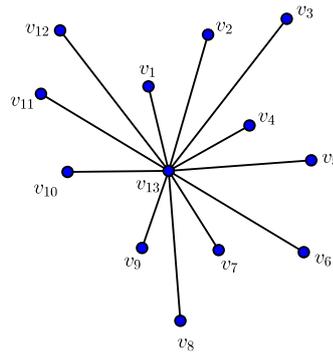


Figura 16: Exemplo de um grafo estrela.

## 2.2 Variedades Topológicas

Nesta seção apresentamos noções e conceitos de Topologia de espaços contínuos, como o  $\mathbb{R}^n$ .

Em linhas gerais **Topologia** (do grego *topos*=forma e *logos*=estudo) é o “estudo da forma”, seu foco é estudar as propriedades dos espaços, assim como as propriedades dos objetos geométricos que permanecem inalterados sob homeomorfismos. O assunto em sua forma moderna foi inventada no final do século *XIX* pelo matemático francês *Henri Poincaré*, como uma consequência de suas tentativas para classificar objetos geométricos.

Em Topologia, dois objetos são equivalentes em um sentido mais amplo, é permitido dobrar, esticar, encolher, retorcer, etc, desde que os objetos não se rompam nem sejam separadas uniões iniciais. Considere como exemplo, um triângulo. Ele é topologicamente o mesmo que uma circunferência, um quadrado, ou uma elipse, pois podemos transformar um no outro de forma contínua, isto é, sem romper nem colar qualquer trecho. Mas uma circunferência não é o “mesmo” que um segmento, pois teríamos que cortar a circunferência em algum ponto para obter o segmento de reta, (EDELSBRUNNER; HARER, 2010).

Estamos interessados em estudar variedades, podemos pensar nas variedades como curvas e superfícies, exceto pelo fato de que podem ser de dimensão maior. A cada variedade é atribuído um número inteiro não negativo, caracterizando sua dimensão, cuja característica pode ser o número de membros independentes (ou “parâmetros”) necessários para especificar um ponto na variedade.

As variedades de dimensão 1, ou 1-variedades, são apenas retas e curvas. Por exemplo a reta real, circunferências, parábolas, ou ainda, o gráfico de alguma função contínua da forma  $y = f(x)$ . Temos ainda as curvas espaciais, que podem ser descritas pelas equações paramétricas  $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ , com  $f, g, h$  funções contínuas.

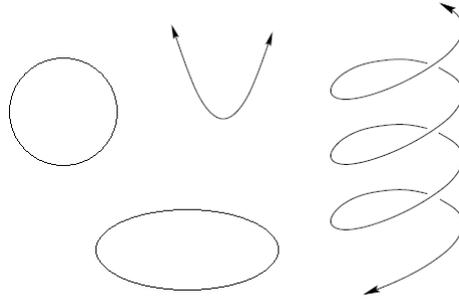


Figura 17: Exemplos de curvas.

Em cada exemplo dado podemos identificar um ponto na curva através de um único número real. Um ponto em uma reta real é um número real, um ponto na circunferência pode ser determinado por um ângulo, um ponto no gráfico da função é determinado pela coordenada  $x$ , e para um ponto de uma curva parametrizada basta que saibamos o valor do parâmetro  $t$ . Diferentes valores do parâmetro podem corresponder ao mesmo ponto, como é o caso dos ângulos em uma circunferência. Mas em todos os casos, se ficamos perto de algum ponto inicial, existe uma correspondência bijetiva entre os números reais próximos e pontos que estão em uma linha ou curva que estão próximos, (LEE, 2010).

As variedades de dimensão 2, ou ainda 2-variedades, são as superfícies. Os exemplos mais comuns são planos e esferas. Ressaltamos que uma esfera, trata-se de uma superfície esférica, não uma bola sólida. A esfera unitária no  $\mathbb{R}^3$  é de dimensão 2 e a bola sólida é de dimensão 3. São exemplos de superfícies: os cilindros, elipsóides, parabolóides, hiperbolóides, e o toro (que pode ser visualizado como uma superfície em forma de rosquinha no  $\mathbb{R}^3$  obtida por revolução de uma circunferência em torno de uma reta que não a intersecta). No topo da Figura 18, temos ilustradas as superfícies de um toro (à esquerda) e um bitoro (à direita), na parte inferior um cilindro (à esquerda) e uma faixa de Möbius (à direita).

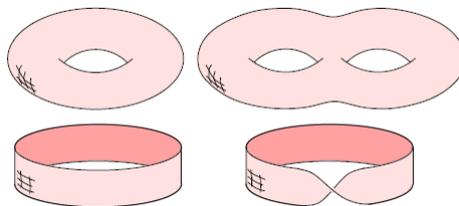


Figura 18: Exemplos de superfícies.

No caso das superfícies sempre precisaremos de duas coordenadas para determinar um de seus pontos. Por exemplo, no plano tipicamente usamos coordenadas cartesianas ou polares, na esfera podemos usar latitude e longitude, e no toro podemos usar dois ângulos.

Não é difícil construir subconjuntos de espaços euclidianos de dimensão maior que podem ser chamados de variedades. Primeiro, qualquer subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  é uma  $n$ -variedade. Exemplos mais interessantes são obtidos usando uma ou mais equações para “deixar de fora” subconjuntos de dimensão menor. Por exemplo, chamamos de 3-esfera unitária o conjunto de pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  satisfazendo a equação

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1$$

Trata-se de uma 3-variedade, isto é, uma variedade de dimensão 3, pois na vizinhança de algum ponto são tomadas exatamente três coordenadas para especificar um ponto próximo.

O elemento chave destes exemplos é que uma variedade de dimensão  $n$  localmente se “parece” com o  $\mathbb{R}^n$ . A noção intuitiva de “parecido”, é formalizada como

**Definição 2.2.1.** (*LEE, 2010*) *Dois subconjuntos do espaços euclidianos  $U \subseteq \mathbb{R}^k, V \subseteq \mathbb{R}^n$  são **topologicamente equivalentes** ou **homeomorfos** se existe uma correspondência bijetiva  $\phi : U \rightarrow V$  tal que ambos  $\phi$  e sua inversa são mapas contínuos.*

A correspondência  $\phi$  é chamada um **homeomorfismo**. Diremos que um subconjunto  $M$  de algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$  é localmente euclidiano de dimensão  $n$  se todo ponto de  $M$  tem uma vizinhança em  $M$  que é topologicamente equivalente a uma bola no  $\mathbb{R}^n$ .

A partir da Definição 2.2.1 podemos pensar que uma  $n$ -variedade é um subconjunto de algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$  que é localmente euclidiano de dimensão  $n$ .

Considere duas superfícies no espaço tridimensional, uma esfera e um cubo. Deveria não ser difícil se convencer de que o cubo pode ser continuamente deformado na esfera sem ser rasgado. Com um pouco mais de trabalho, é possível ver como a superfície de um toro pode ser continuamente deformada na superfície de uma xícara.

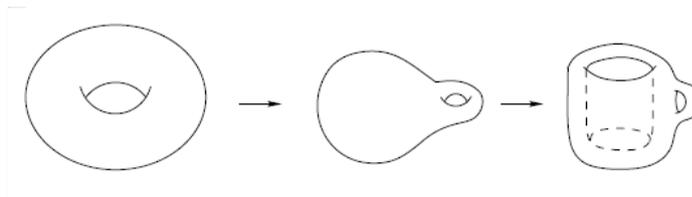


Figura 19: Ilustração da deformação do toro em uma xícara.

Com um pouco de reflexão é fácil se convencer que não existe homeomorfismo de uma esfera em um toro: tal mapa teria que formar um “furo” na esfera, e assim não poderia ser contínuo.

É relativamente simples provar que duas variedades são topologicamente equivalentes uma vez que você se convenceu disso intuitivamente, basta escrever um homeomorfismo explícito entre elas. O que é muito mais difícil é provar que duas variedades não são homeomorfas - mesmo quando parece “evidente” que elas não são, como no caso de uma esfera e um toro. Afinal é necessário mostrar que ninguém poderia encontrar um tal mapa.

Uma importante definição em topologia é a de **invariante topológico**, que é uma propriedade que não se altera por homeomorfismos. Ele pode ser uma propriedade geométrica do espaço, um número associado a um espaço ou um sistema algébrico como um grupo, um anel ou um módulo. A maneira usual para provar que duas variedades não são topologicamente equivalentes é encontrando invariantes topológicos. Se duas variedades têm diferentes invariantes, elas não podem ser homeomorfas, (LEE, 2010).

Para encerrar a seção apresentaremos a definição usual de espaço topológico. Como desejamos obter invariantes que não se alteram sob os homeomorfismos, precisamos de uma espécie de “espaço” sem distâncias em que funções contínuas façam sentido. Devemos refletir que um homeomorfismo entre os espaços métricos não necessariamente preserva distância, tome como exemplo o homeomorfismo entre duas esferas de diferentes raios. Por exemplo a área que uma circunferência delimita (ou o volume de uma esfera) não é um invariante topológico, pois se temos duas circunferências com tamanhos de raios diferentes, temos diferentes valores para as áreas. Motivado por essa necessidade temos,

**Definição 2.2.2.** (LEE, 2010) *Se  $\mathbb{X}$  é um conjunto, uma **topologia** em  $\mathbb{X}$  é uma coleção  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $\mathbb{X}$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $\mathbb{X}$  e  $\emptyset$  são elementos de  $\mathcal{T}$ .
2.  $\mathcal{T}$  é fechado sob interseções finitas: Se  $U_1, \dots, U_n$  são elementos de  $\mathcal{T}$ , então a interseção deles  $U_1 \cap \dots \cap U_n$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ .
3.  $\mathcal{T}$  é fechado sob união arbitrária: Se  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  é alguma família de elementos de  $\mathcal{T}$  (finita ou infinita), então sua união  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ .

Um par  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  consistindo de um conjunto  $\mathbb{X}$  com uma topologia  $\mathcal{T}$  em  $\mathbb{X}$  é chamado um **espaço topológico**.

A topologia usual do  $\mathbb{R}^n$  são os abertos, para dimensão 1 temos os intervalos, para dimensão 2 são os círculos de centro e raio dados (ou retângulos, podemos pensar  $A \times B$ , com  $A$  e  $B$  intervalos abertos), e assim por diante. São exemplos de espaços topológicos:

- O intervalo unitário,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , definido por

$$I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

- Para o inteiro não negativo  $n$ , a bola unitária aberta de dimensão  $n$  é o subconjunto  $\mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  definida por

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

## 3 Espaços Contráteis

### 3.1 Espaços Digitais e Operações

Um **espaço digital**  $G$  é um grafo simples  $G = (V, W)$ , em que  $V$  é um conjunto finito ou enumerável de vértices (ou pontos),  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$  e um conjunto de arestas  $W = \{(v_p v_q), \dots\} \subseteq V \times V$ , (EVAKO, 2015).

Segundo Evako (EVAKO, 2015), noções como conectividade, adjacência, dimensionalidade e distância em um grafo  $G$  estão completamente definidas pelos conjuntos  $V$  e  $W$ . Já vimos que a conectividade (Definição 2.1.3), adjacência e distância entre vértices (Definição 2.1.2) dependem exclusivamente dos conjuntos de vértices e arestas, mas para dimensão precisaremos do conceito de vizinhança que veremos adiante.

Dado um espaço digital  $G = (V, W)$  utilizaremos as notações  $v_p \in G$  e  $(v_p v_q) \in G$  se  $v_p \in V$  e  $(v_p v_q) \in W$ , respectivamente, se isso não ocasionar qualquer confusão. Como estaremos apenas utilizando subgrafos induzidos por um conjunto de vértices, usaremos apenas subgrafo para um subgrafo induzido e o denotaremos por  $H \subseteq G$ .

Para exemplificar as Definições 3.1.1 e 3.1.2 utilizaremos o grafo abaixo.

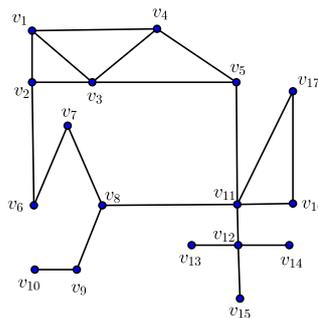


Figura 20: Grafo utilizado em algumas definições ao longo do Capítulo.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $G$  um grafo e  $H \subseteq G$ , a operação diferença denotada por  $G - H$ , é o subgrafo de  $G$  obtido a partir da eliminação de todos os vértices pertencentes a  $H$ , juntamente com as arestas que incidem em cada um dos vértices retirados.*

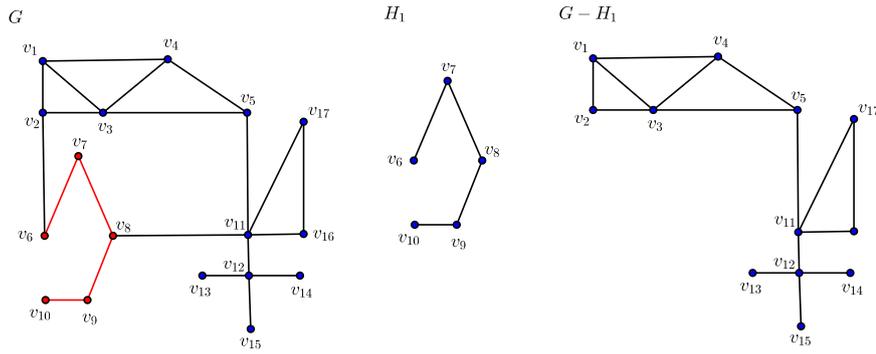


Figura 21: Ilustração da operação diferença.

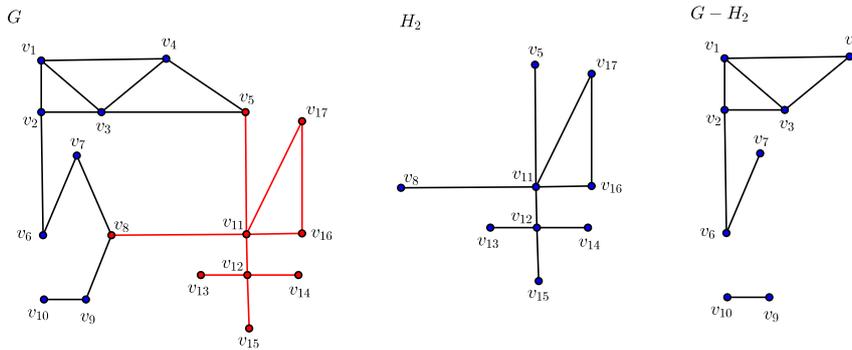


Figura 22: Ilustração da operação diferença.

Note que na Figura 21 o grafo resultante é conexo, mas na Figura 22 o grafo é desconexo. Isso nos diz que a operação diferença pode desconectar o grafo  $G$ , o resultado de  $G - H$  ser conexo ou desconexo depende apenas do subgrafo  $H$ .

**Definição 3.1.2.** (EVAKO, 2015) Sejam  $G = (V_G, W_G)$  e  $H = (V_H, W_H)$  dois grafos com conjuntos disjuntos de vértices,  $V_G$  e  $V_H$ , a **soma**  $G \oplus H$  é o grafo

$$S = (V_G \cup V_H, (W_G \cup W_H) \cup A_1)$$

com  $A_1 = \{\{v_i, v_j\} | v_i \in V_G \text{ e } v_j \in V_H\}$ . Isto é, o grafo obtido na operação contém uma cópia de  $G$  e uma cópia de  $H$  além de arestas que conectam todos os vértices de  $G$  a todos os vértices de  $H$ .

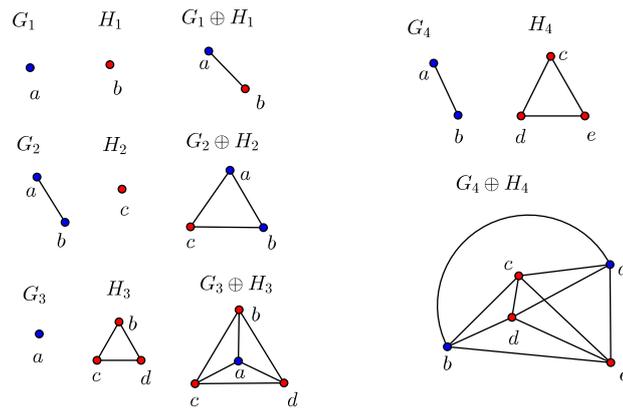


Figura 23: Exemplos da operação soma entre grafos.

**Proposição 3.1.3.** *Dados os grafos  $G_1 = (V_{G_1}, W_{G_1})$ ,  $G_2 = (V_{G_2}, W_{G_2})$  e  $G_3 = (V_{G_3}, W_{G_3})$ . São propriedades da operação soma:*

- (a)  $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$
- (b)  $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$

Ilustramos na Figura 36 o resultado da Proposição 3.1.3, item (b).

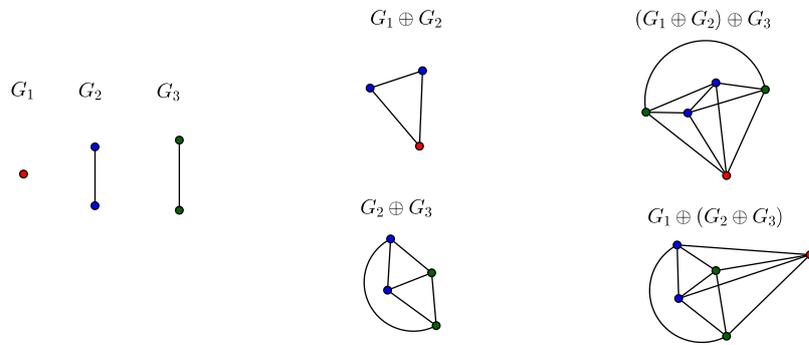


Figura 24: Exemplo da associatividade da operação soma.

*Demonstração.*

- (a)  $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$

Decorre imediatamente da definição, pois

$$G_1 \oplus G_2 = (V_{G_1} \cup V_{G_2}, (W_{G_1} \cup W_{G_2}) \cup A_1) = (V_{G_2} \cup V_{G_1}, (W_{G_2} \cup W_{G_1}) \cup A_1) = G_2 \oplus G_1$$

com  $A_1 = \{v_i \in V_{G_1}, v_j \in V_{G_2} \mid v_i v_j \text{ é uma aresta}\}$ . Estamos também utilizando o fato de que a união de conjuntos é comutativa.

$$(b) \quad G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$$

Sejam

$$G_1 \oplus G_2 = (V_{G_1} \cup V_{G_2}, (W_{G_1} \cup W_{G_2}) \cup A_1), \text{ com } A_1 = \{v_i \in V_{G_1}, v_j \in V_{G_2} \mid v_i v_j \text{ é uma aresta} \}$$

$$G_2 \oplus G_3 = (V_{G_2} \cup V_{G_3}, (W_{G_2} \cup W_{G_3}) \cup A_2), \text{ com } A_2 = \{v_j \in V_{G_2}, v_k \in V_{G_3} \mid v_j v_k \text{ é uma aresta} \}$$

Temos então que,

$$G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = (V_{G_1} \cup (V_{G_2} \cup V_{G_3}), (W_{G_1} \cup (W_{G_2} \cup W_{G_3} \cup A_2)) \cup A_3)$$

$$\text{com } A_3 = \{v_i \in V_{G_1}, v_r \in (V_{G_2} \cup V_{G_3}) \mid v_i v_r \text{ é uma aresta} \}$$

$$(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = ((V_{G_1} \cup V_{G_2}) \cup V_{G_3}, ((W_{G_1} \cup W_{G_2} \cup A_1) \cup W_{G_3}) \cup A_4)$$

$$\text{com } A_4 = \{v_s \in (V_{G_1} \cup V_{G_2}), v_k \in V_{G_3} \mid v_s v_k \text{ é uma aresta} \}$$

Devemos notar que os conjuntos dos vértices de  $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$  e  $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$  são os mesmos, mas não está claro que os conjuntos  $(W_{G_1} \cup (W_{G_2} \cup W_{G_3} \cup A_2)) \cup A_3$  e  $((W_{G_1} \cup W_{G_2} \cup A_1) \cup W_{G_3}) \cup A_4$  possuem as mesmas arestas. De fato, é suficiente mostrar que os conjuntos  $A_2 \cup A_3$  e  $A_1 \cup A_4$  são iguais.

Uma aresta pertencente a  $A_2 \cup A_3$  é tal que suas extremidades são:

- Ou um vértice de  $V_{G_2}$  e um vértice de  $V_{G_3}$ ;
- Ou um vértice de  $V_{G_1}$  e um vértice de  $V_{G_2} \cup V_{G_3}$ .

Segue que,

$$\begin{aligned} ab \in A_2 \cup A_3 &\Leftrightarrow ab \in A_2 \text{ ou } ab \in A_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ab \in A_2 \Rightarrow a \in V_{G_2} \text{ e } b \in V_{G_3}, \\ ab \in A_3 \Rightarrow a \in V_{G_1} \text{ e } b \in V_{G_2} \cup V_{G_3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a \in V_{G_1} \cup V_{G_2} \text{ e } b \in V_{G_2} \cup V_{G_3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ou } a \in V_{G_1} \text{ e } b \in V_{G_2}, \\ \text{Ou } a \in V_{G_1} \text{ e } b \in V_{G_3}, \\ \text{Ou } a \in V_{G_2} \text{ e } b \in V_{G_3}. \end{cases} \end{aligned}$$

De modo análogo, considerando uma aresta  $cd \in A_1 \cup A_4$ , é possível concluir que  $c \in V_{G_1} \cup V_{G_2}$  e  $d \in V_{G_2} \cup V_{G_3}$ .

Do fato das arestas  $ab$  e  $cd$  serem, respectivamente, as mesmas que  $ba$  e  $dc$ , podemos então concluir que  $A_2 \cup A_3 \subseteq A_1 \cup A_4$  e  $A_1 \cup A_4 \subseteq A_2 \cup A_3$ , que implica a igualdade que queríamos demonstrar.  $\square$

## 3.2 Espaço Contrátil

As próximas definições são a chave para que possamos estruturar o estudo da Topologia Digital, via Teoria dos Grafos, pois será a partir delas que seremos capazes de estudar as Variedades Digitais e suas principais propriedades topológicas.

**Definição 3.2.1.** Chamaremos *vizinhança* (ou *borda*) de um vértice, o subgrafo  $O(v) \subseteq G$  contendo todos os vértices adjacentes a  $v$  (exceto o próprio  $v$ ). A *bola* de um vértice  $v$ , é o subgrafo  $N(v) \subseteq G = v \oplus O(v)$ .

Para ilustrar a vizinhança e a bola de um vértice, utilizaremos novamente o grafo apresentado na Figura 20.

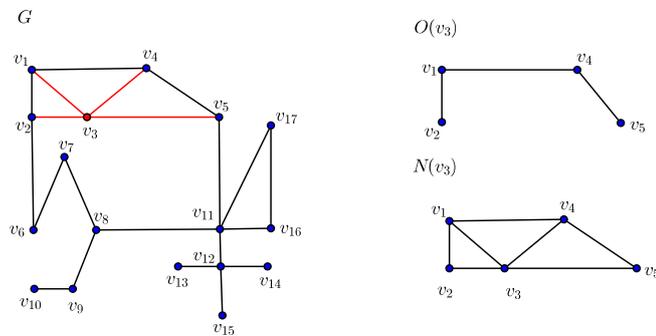


Figura 25: Exemplos de borda e bola de um vértice.

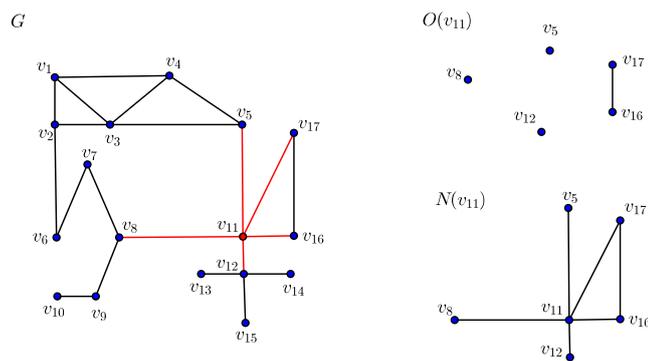


Figura 26: Exemplos de borda e bola de um vértice.

Por conta das observações a seguir, disponíveis em (SMYTH; WEBSTER, 2007), preferimos adotar a definição de dimensão apresentada em (KNILL, 2012).

Uma das principais intuições sobre a dimensão é que a dimensão de um espaço deve ser maior que a das partes do espaço. Uma adaptação demasiada literal do conceito de fronteira topológica resultará, numa dimensão muito elevada para espaços discretos que são simples. Mesmo a abordagem cuidadosa de Evako, resulta em uma dimensão

incrivelmente “alta” para nossos modelos espaciais básicos. Assim como na topologia, esperamos:

- Que a função dimensão  $dim$  seja um invariante topológico.
- Que a dimensão do  $n$ -cubo seja  $n$ .
- Monotonicidade: Se  $X$  é um subespaço (subgrafo induzido) de  $Y$ , então  $dim(X) \leq dim(Y)$ .

Temos então,

**Definição 3.2.2.** *Seja  $G$  um grafo, sua **dimensão** é dada por*

$$dim(G) = 1 + \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} dim(O(v))$$

com  $dim(\emptyset) = -1$ .

Grafos do tipo ciclo e árvores são exemplos de grafos de dimensão 1, já um triângulo possui dimensão 2. Em geral, um grafo completo  $K_n$  possui dimensão  $n - 1$ . A dimensão é definida para qualquer grafo, mas pode acontecer de ser uma fração.

Chamaremos de **grafo trivial** o grafo que possui um único vértice.

**Definição 3.2.3.** (EVAKO, 2015) *Um grafo  $G$  é chamado **contrátil**, se ele pode ser convertido para o grafo trivial por exclusão sequencial de vértices simples. Um **vértice**  $v \in G$  é dito **simples** se sua vizinhança,  $O(v)$ , é um grafo contrátil. Uma aresta  $(vu) \in G$  é dita **simples**, se  $O(vu) = O(v) \cap O(u)$  é um grafo contrátil.*

A primeira observação a ser feita é que essa definição é recursiva, isto é, determinar se um grafo é ou não é contrátil, requer que tenhamos uma sequência de deleção de vértices simples e que se encerra quando obtemos um grafo contendo um único vértice, mas só sabemos que determinado vértice é simples se sua vizinhança for um grafo contrátil. Note que se um vértice  $v$  possui grau 1, isso nos diz que ele possui um único vizinho, então o vértice  $v$  é simples.

As próximas figuras ilustram o procedimento de investigação para concluir se um grafo é contrátil.

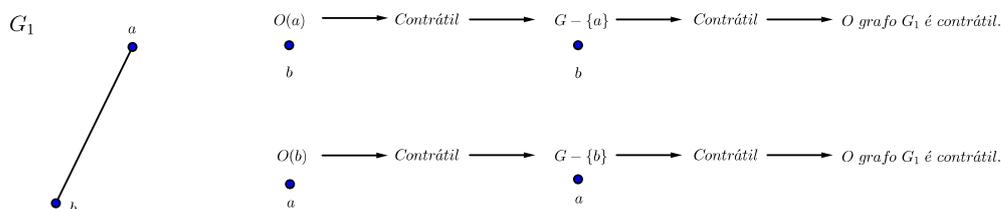


Figura 27: Ilustração da investigação se  $K_2$  é contrátil.

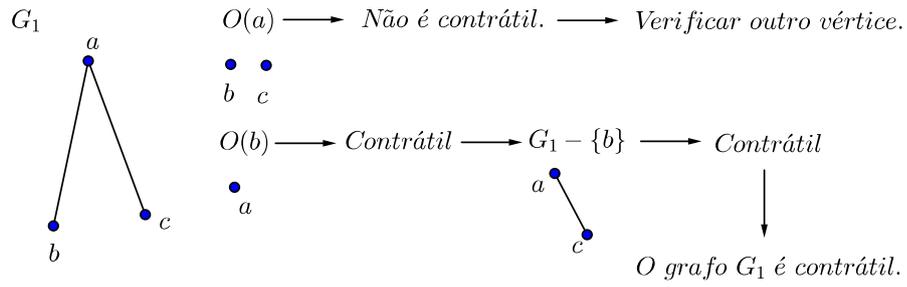


Figura 28: Ilustração da investigação de um grafo contrátil.

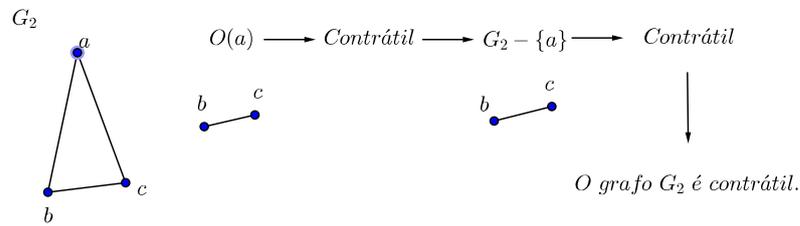


Figura 29: Ilustração da investigação se  $K_3$  é contrátil.

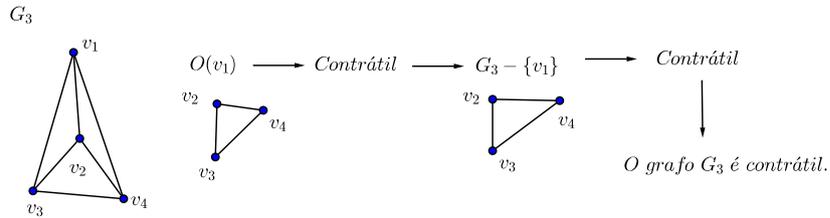


Figura 30: Ilustração da investigação se  $K_4$  é contrátil.

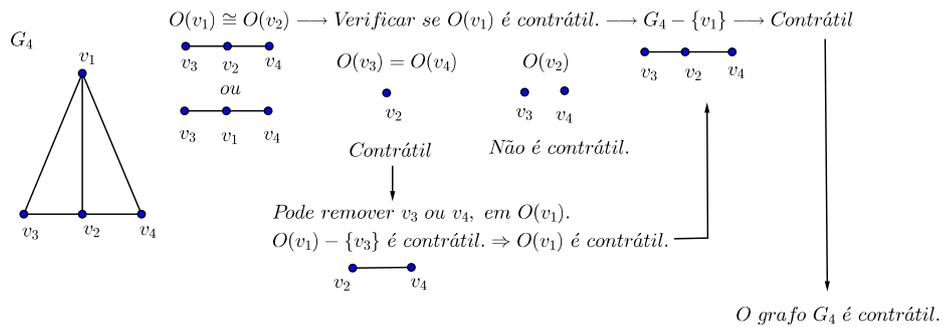


Figura 31: Ilustração da investigação se  $v_1 \oplus L_3$  é contrátil.

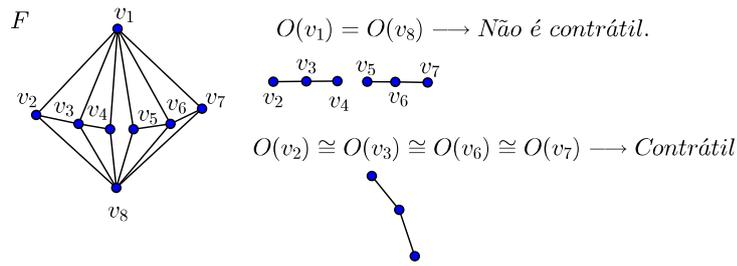


Figura 32: Ilustração da investigação de um grafo não contrátil.

Nas próximas figuras apresentamos mais exemplos de grafos, com a experiência adquirida nos exemplos anteriores, podemos concluir que são contráteis.

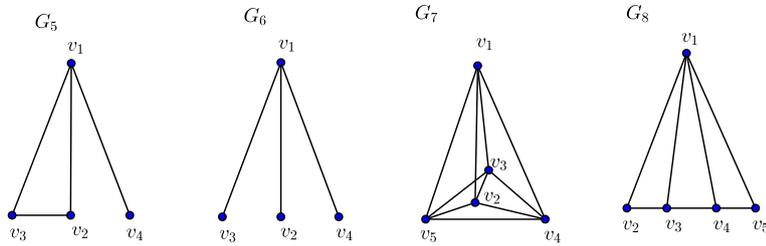


Figura 33: Exemplos de grafos contráteis.

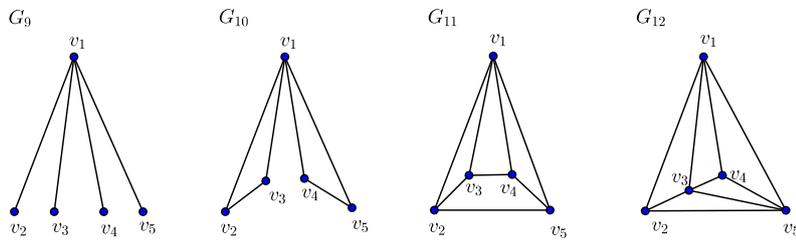


Figura 34: Exemplos de grafos contráteis.

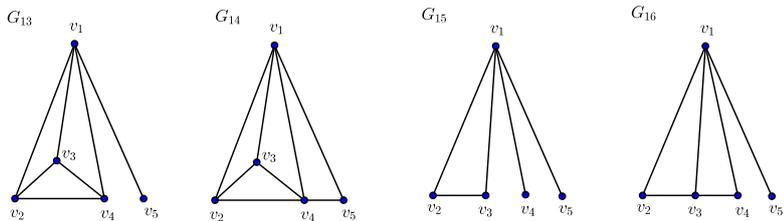


Figura 35: Exemplos de grafos contráteis.

Deleções e colagens de vértices e arestas simples são chamadas **transformações contráteis**. Os grafos  $G$  e  $H$  são chamados **homotopicamente equivalentes** ou simplesmente **homotópicos** se um deles pode ser convertido no outro por uma sequência de

transformações contráteis. Será justamente através dessa noção de homotopia que poderemos transformar uma  $n$ -variedade digital em outra, sem que haja perda de características topológicas na vizinhança do vértice, isto é, as transformações contráteis preservam a topologia da vizinhança dos vértices.

Para melhor ilustrar a contratibilidade apresentaremos alguns resultados a respeito da possibilidade dos tipos de grafos que apresentamos anteriormente serem ou não contráteis.

**Proposição 3.2.4.** *Todo grafo linha é contrátil.*

*Demonstração.* Note que para um vértice  $v$  que está na extremidade da linha,  $O(v)$  é o grafo trivial, e portanto  $v$  é simples e pode ser deletado. O grafo resultante é novamente um grafo linha e podemos repetir o procedimento até obter o grafo trivial.  $\square$

**Proposição 3.2.5.** *Todo grafo estrela é contrátil.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo estrela com centro no vértice  $v$ , para qualquer vértice  $w \in G$ , exceto  $v$ , a vizinhança  $O(w) = v$  é o grafo trivial. Logo todos os pontos de  $G$ , exceto  $v$  são simples e podem ser deletados um a um, restando apenas  $v$ . Assim temos conseguido nossa sequência de deleções de vértices simples.  $\square$

**Proposição 3.2.6.** *Todo grafo completo é contrátil.*

*Demonstração.* Faremos a prova por indução em  $n$ . Verificaremos para  $n = 2$ , pois quando  $n = 1$  temos o grafo trivial.

Um grafo  $K_2$  possui apenas dois vértices,  $v_1$  e  $v_2$ , conectados por uma aresta. Temos que  $O(v_1) = v_2$ , ou seja, sua vizinhança é o grafo trivial, logo  $v_1$  é um vértice simples e pode ser deletado. Resta apenas  $v_2$  que é o grafo trivial e podemos concluir que  $K_2$  é contrátil.

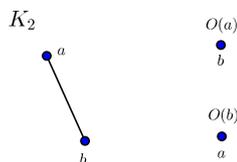


Figura 36: Ilustração da contratibilidade de  $K_2$ .

Suponha que o grafo  $K_{n-1}$  é contrátil, devemos mostrar que  $K_n$  também será contrátil.

O grafo  $K_n$  possui  $n$  vértices, que chamaremos de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Para qualquer  $v_i \in K_n$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $O(v_i) = K_{n-1}$ , uma vez que  $v_i$  está conectado a todos os demais

vértices de  $K_n$  e estes vértices também são conectados entre si. Sendo assim,  $v_i$  é um vértice simples e pode ser deletado. O grafo  $K_n - v_i$ , resultante de  $K_n$  após a deleção, é um grafo completo com  $n - 1$  vértices,  $K_{n-1}$ , que por hipótese de indução é contrátil. Logo  $K_n$  é contrátil.  $\square$

**Proposição 3.2.7.** *Todo grafo árvore é contrátil.*

*Demonstração.* Como as folhas do grafo árvore possuem grau 1, a vizinhança de cada um desses vértices é o grafo trivial. Podemos remover todas as folhas do grafo original. Basta repetir o procedimento até que tenhamos um grafo do tipo linha, como ele é contrátil, então temos o resultado que queríamos.  $\square$

**Lema 3.2.8.** *Se  $G$  é um grafo do tipo ciclo e  $|G| \geq 4$ , então  $G$  não é contrátil.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo tipo ciclo, e  $|G| \geq 4$ . Para qualquer vértice  $v \in G$ , o subgrafo  $O(v)$  tem dois vértices que não estão conectados. Um grafo nessas condições não é contrátil, pois não há como deletar qualquer vértice (pois nenhum deles será simples) e chegar ao grafo trivial. Sendo assim,  $G$  não possui vértices simples, logo não podemos ter a sequência de deleções de vértices simples, implicando que o grafo  $G$  não é contrátil.  $\square$

Note que devemos exigir que  $|G| \geq 4$ , pois se  $|G| = 3$ , teríamos um  $K_3$  que é contrátil pela Proposição 3.2.6.

**Proposição 3.2.9.** *Todo grafo roda é contrátil.*

*Demonstração.* Se tomarmos como ponto de partida o vértice que se conecta a todos os demais vértices, chamaremos  $v_0$ , temos que  $O(v_0)$  é um ciclo,  $C_n$ , que pelo lema anterior não é contrátil. Para qualquer outro vértice  $v$  em um grafo roda, a vizinhança  $O(v)$ , é um grafo do tipo linha com 3 vértices, que sabemos da Proposição 3.2.4 é contrátil. Portanto, um desses vértices pode ser removido.

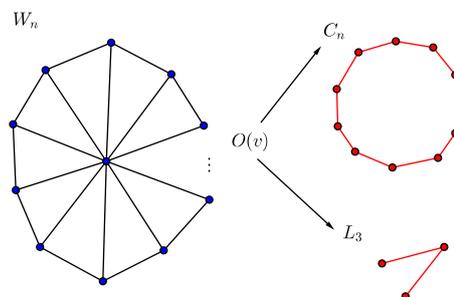


Figura 37: Vizinhanças.

Realizada a remoção do primeiro vértice, no grafo obtido  $W_n - \{v\}$ , a vizinhança  $O(v_0)_{W_n - \{v\}}$  é um grafo do tipo linha,  $L_{n-1}$ , que é contrátil. Portanto  $v_0$  agora pode ser

removido. Após a remoção de  $v_0$  temos precisamente o grafo  $L_{n-1}$ , que é contrátil e temos obtido o nosso resultado. □

**Proposição 3.2.10.** *Todo grafo bipartido completo  $K_{m,n}$ , com  $m$  e  $n$  diferentes de 1, não é contrátil.*

*Demonstração.* Supondo então que ambos  $m$  e  $n$  são diferentes de 1 temos que a vizinhança  $O(v)$ , para qualquer vértice em  $K_{m,n}$  é desconexa contendo dois vértices. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração da Proposição 3.2.8, o subgrafo  $O(v)$  não é contrátil. Isso implica que  $K_{m,n}$  não possui vértices simples e não podemos ter a sequência de deleções de vértices simples. Logo  $K_{m,n}$  não é contrátil. □

A restrição  $m$  e  $n$  diferentes de 1 é exigida pois se  $m = 1$  e  $n \neq 1$  ou  $m \neq 1$  e  $n = 1$ , o grafo em questão também pode ser considerado do tipo estrela, e sabemos da Proposição 3.2.5 que o grafo é contrátil.

### 3.3 Principais resultados a respeito de Contratibilidade

Temos a seguir um axioma que verificaremos para grafos com um pequeno número de vértices, mas que será fundamental para demonstração da Proposição 3.3.1.

**Axioma 1.** (*IVASHCHENKO, 1994*) *Em um grafo contrátil  $G$  existem dois vértices,  $u, v \in G$  não adjacentes tais que  $O(uv)$  é contrátil.*

Na Figura 38 representamos grafos que são contráteis, em cada um deles existe pelo menos dois vértices que não são adjacentes e tais que a interseção de suas vizinhanças é contrátil.

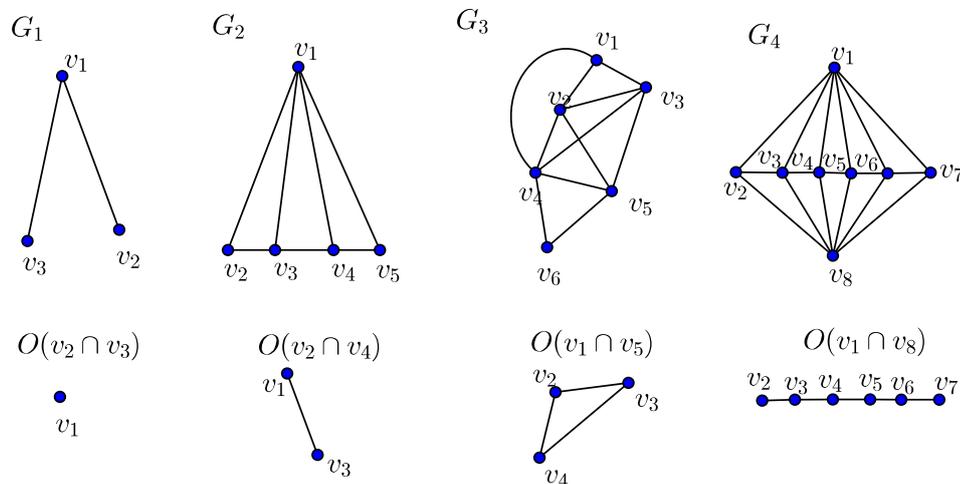


Figura 38: Ilustração do Axioma 1.

Como consequência imediata do Axioma 1, temos que o fato de  $O(uv)$  ser contrátil nos permite acrescentar ao grafo  $G$  uma aresta simples conectando os vértices  $u$  e  $v$ , obtendo um novo grafo que é homotópico à  $G$ .

Gostaríamos de chamar a atenção para dois fatos que ilustraremos na Figura 39: O grafo  $G_5$  é contrátil, mas não podemos adicionar a aresta  $v_1v_6$ , pois a vizinhança  $O(v_1v_6) = O(v_1 \cap v_6)$  é vazia. Já o grafo  $G_6$  não é contrátil, embora não seja possível adicionar a aresta  $v_1v_8$ , é possível adicionar tanto a arestas  $v_2v_4$  e quanto a aresta  $v_5v_7$ . Em resumo, se um grafo é contrátil não é verdade que dados quaisquer dois vértices podemos adicionar arestas simples e, se for possível fazer colagem de aresta simples em um grafo não podemos concluir que ele é contrátil.

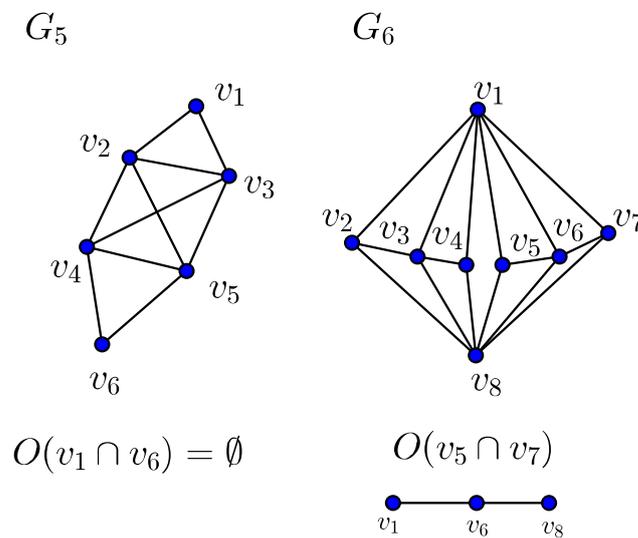


Figura 39: Ilustração do Axioma 1.

**Proposição 3.3.1.** (EVAKO, 2015)

- (a) Seja  $G$  um grafo e  $v$  um vértice ( $v \notin G$ ). Então,  $v \oplus G$  é um grafo contrátil.
- (b) Se  $K_n$  é um grafo completo, então  $K_n \oplus G$  é um grafo contrátil.
- (c) Seja  $G$  um grafo contrátil e  $S(a, b)$  um grafo desconexo com apenas dois pontos  $a$  e  $b$ . Então,  $S(a, b) \oplus G$  é um grafo contrátil.

*Demonstração.*

- (a) Se  $G$  é contrátil,  $v \oplus G$  também será, pois  $O(v) = G$ , que implica  $v$  ser um vértice simples, podendo ser deletado. Feito isso, nos resta o grafo  $G$  que é contrátil e temos então o resultado desejado. Se  $G$  não é contrátil, já verificamos anteriormente que se

$|G| \leq 4$ , os grafos do tipo  $v \oplus G$  são contráteis (Figuras 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35). Faremos indução na quantidade de vértices de  $G$ . Suponha que se  $|G| = n$ , então  $v \oplus G$  é contrátil, mostraremos que se  $|G| = n + 1$  o resultado também se verifica. No grafo  $v \oplus G$  existem vértices  $a_1$  e  $a_2$  que não estão conectados, mas a vizinhança  $O(a_1 a_2)$  em  $v \oplus G$  é justamente  $v \oplus (O(a_1 a_2))_G$ . Como  $|(O(a_1 a_2))_G| \leq n + 1$ , segue da hipótese de indução que  $O(a_1 a_2)$  é contrátil. Sendo assim podemos então adicionar a aresta simples  $a_1 a_2$  no grafo  $v \oplus G$ . Repetindo o procedimento até que todos os vértices em  $v \oplus G$  sejam adjacentes obteremos o grafo completo  $K_{n+2}$ , sabemos da Proposição 3.3.1 que ele é contrátil, e obtemos o resultado desejado.

- (b) Dados o grafo  $G$  e os vértices  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sabemos que  $k_1 \oplus G$  é contrátil, pelo item (a). Pelo mesmo motivo  $k_1 \oplus k_2 \oplus G$  é contrátil e  $(k_1 k_2) = K_2$ . Pela associatividade da operação soma temos que  $k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_n \oplus G = K_n \oplus G$  é contrátil.
- (c) Note que  $O(a) = G$  que é contrátil, logo o ponto  $a$  é simples (análogo para o vértice  $b$ ), e pode ser deletado. O grafo resultante será  $b \oplus G$  que é contrátil pelo item (a), logo  $S(a, b) \oplus G$  é contrátil.

□

**Proposição 3.3.2.** (EVAKO, 2015) *Qualquer grafo contrátil é conexo.*

*Demonstração.* Suponha, que um grafo contrátil seja desconexo. Deletando todos os seus pontos simples, jamais chegaremos ao grafo trivial. O máximo que pode ocorrer é que em cada componente seja possível realizar as deleções de vértices simples, chegando ao grafo trivial em cada. Mas desse ponto em diante nada podemos fazer, pois a vizinhança de cada um destes é vazia. Temos então um absurdo. Logo se um grafo é contrátil, tem que ser conexo. □

**Definição 3.3.3.** (IVASHCHENKO, 1994) *Se um grafo  $G$  é do tipo  $v \oplus H$ ,  $H \subseteq G$ ,  $G$  é chamado *cone*.*

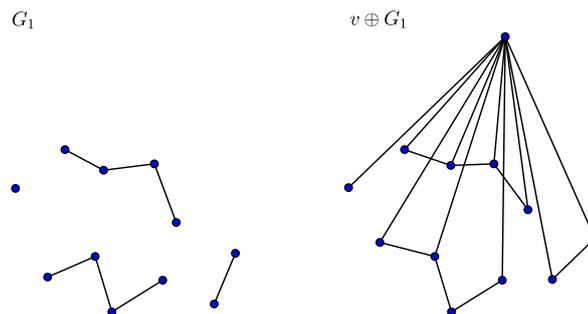


Figura 40: Exemplo de grafo do tipo cone.

Note que na definição não fazemos qualquer exigência em relação a estrutura de  $O(v)$ . De fato os grafos do tipo roda são casos particulares dos grafos cone.

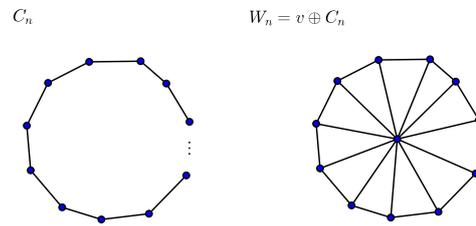


Figura 41: Grafos do tipo roda são do tipo cone.

**Lema 3.3.4.** (IVASHCHENKO, 1994) *Todo grafo cone é contrátil.*

*Demonstração.* Pela definição de grafo cone, temos o resultado como consequência imediata da Proposição 3.3.1, item (a).  $\square$

**Lema 3.3.5.** *Se  $v$  é simples em  $G$ ,  $u$  é simples em  $G - v$  e  $u \notin O(v)$ . Então  $u$  é simples em  $G$ .*

*Demonstração.* Como  $u \notin O(v)$ , significa que a aresta  $(uv) \notin G$ , então  $O(u) \in G - v$  é o mesmo que  $O(u) \in G$ , como  $u$  é simples em  $G - v$  então  $O(u)$  é contrátil, logo  $u$  é simples em  $G$ .  $\square$

**Proposição 3.3.6.** (IVASHCHENKO, 1994) *Seja  $G$  um grafo contrátil com cardinalidade  $|G| > 1$ . Então  $|G|$  tem pelo menos, dois vértices simples.*

*Demonstração.* Note que se  $G$  é um cone, então sabemos da Proposição 3.3.1 que  $G$  é contrátil e na demonstração obtivemos pelo menos dois vértices simples. Perceba que considerar  $G$  sem ser cone também cobre caso dele ser completo. Suponha que  $G$  é um grafo diferente de um cone. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  os vértices de  $G$ . Considere o vértice  $v_1$ , pelo Axioma 1 temos um vértice  $v_i$  que não é adjacente a  $v_1$  tal que  $O(v_1, v_i)$  é contrátil, dessa forma podemos colar a aresta  $v_1, v_i$ , que será simples. Repetiremos esse procedimento até que todos os vértices de  $G$  fiquem conectados a  $v_1$ . Perceba que o último vértice da sequência a ser conectado a  $v_1$ , digamos que tal vértice seja  $v_s$ , é simples em  $G$ , pois  $v_s$  estará conectado a  $v_1$ , e teremos construído um grafo homotópico a  $G$ , que é do tipo  $v_1 \oplus H$ , em que  $H$  é o subgrafo de  $G$  a partir da colagem de arestas simples. Isto é, teremos feito  $v_1 \oplus H$ , a partir da colagem de arestas simples. Logo, pelo Lema 3.3.4  $O(v_s)$  será contrátil e portanto  $v_s$  é simples.

Repetindo o nosso procedimento de colar arestas simples, partindo agora do vértice  $v_s$ , obteremos um outro vértice simples de  $G$ , digamos  $v_j$ , tal que  $v_j \neq v_i$ , e assim temos o nosso resultado.

□

**Corolário 3.3.7.** (IVASHCHENKO, 1994) *Sejam  $G$  um grafo contrátil e  $v$  um vértice de  $G$  tal que  $O(v) \neq G - v$ . Então existe pelo menos um vértice simples em  $G$  não adjacente a  $v$ .*

*Demonstração.* A demonstração é análoga à da Proposição anterior se fizermos  $v = v_1$ . □

**Proposição 3.3.8.** (IVASHCHENKO, 1994) *Seja  $H$  um subgrafo contrátil de um grafo contrátil  $G$ , com  $H \neq G$ . Então existe um vértice simples  $v \in G$ , tal que  $v \notin H$ .*

*Demonstração.* Colaremos um vértice  $x$  a  $G$  de modo que  $O(x) = H$ , dessa forma  $x$  é um ponto simples, e o grafo obtido  $M = G \cup \{x\}$  é contrátil (pois adicionamos ao grafo  $G$  um vértice simples). Pelo Corolário 3.3.7, sabemos que existe um vértice  $v \in M$  não adjacente a  $x$  tal que  $v$  é simples. Por construção todos os vértices de  $H$  estão conectados a  $x$ , sendo assim  $v \notin H$ , e temos o nosso resultado.

□

**Proposição 3.3.9.** (IVASHCHENKO, 1994) *Seja  $H$  um subgrafo contrátil de um grafo contrátil  $G$ . Então,  $H$  pode ser transformado em  $G$  por colagem sequencial de vértices simples (equivalentemente,  $G$  pode ser transformado em  $H$  por exclusão sequencial de pontos simples).*

*Demonstração.* Tal como fizemos na demonstração anterior, construiremos o grafo  $M = G \cup \{x\}$ . Conectaremos todos os vértices de  $G$  ao vértice  $x$ , sendo todas essas arestas simples. Note que colar tais arestas em  $M$  é equivalente a colar vértices simples a  $H$  de modo a obter  $G$ . Quando o último vértice  $v_i \in M$  for conectado a  $x$  no grafo  $M$ , equivalentemente, o mesmo  $v_i$  for colado a  $H$ , teremos transformado  $H$  em  $G$ , e vice-versa.

□

**Proposição 3.3.10.** (IVASHCHENKO, 1994) *Sejam  $G$  grafo contrátil e  $v$  um de seus vértices. Se  $G - v$  é contrátil, então  $v$  é um vértice simples.*

*Demonstração.* Note que se  $O(v) = G - v$ , teríamos por definição que  $v$  é um vértice simples, pois por hipótese  $G - v$  é contrátil. Suporemos que  $O(v) \neq G - v$ . Suponha que o resultado é verificado para  $G$  quando  $|G| \leq n$ . Considere o grafo contrátil  $G$ , tal que  $|G| = n + 1$ , com o subgrafo contrátil  $G - v$ , e tal que  $O(v) \neq G - v$ . Sabemos que existe um vértice simples,  $u \in G$ , não adjacente a  $v$ , isto é,  $O(u)$  é contrátil e  $u \notin O(v)$ . Segue que,  $O(v) \in G - u$  é o mesmo que  $O(v) \in G$ , pois  $u$  e  $v$  não são adjacentes. Da mesma forma  $O(u) \in G - v$  é o mesmo que  $O(u) \in G$ . Como  $G - u$  e  $G - v$  são ambos grafos contráteis, e  $|G - u| = n$ , sabemos que  $v$  é simples em  $G - u$ . Logo,  $v$  será simples em  $G$ .

□

**Proposição 3.3.11.** (EVAKO, 2015) *Sejam grafos  $G$  e  $H$  homotópicos.  $G$  é conexo, se e somente se,  $H$  é conexo.*

*Demonstração.* Claramente colar vértices ou arestas simples não faz com que um grafo se desconecte. Para a remoção de vértices simples devemos recordaer que a vizinhança do vértice em questão deve ser conexa (Proposição 3.3.2), assim em toda remoção de vértice simples não é possível removê-lo e desconectar o grafo. O mesmo argumento é válido para as arestas simples, pois se uma aresta quando removida desconectar o grafo implicaria que as vizinhanças dos vértices de suas extremidades possuem interseção vazia, logo a aresta em questão não poderia ser simples.  $\square$

O que a Proposição 3.3.11 nos diz é que as transformações contráteis preservam a conexidade de grafos que são homotópicos.

### 3.4 Característica de Euler

Como dito antes, uma boa maneira de distinguir as variedades é através dos invariantes, nossas Variedades Digitais estão nos aguardando no Capítulo 4. Utilizaremos como invariante a Característica de Euler, para melhor entendimento trataremos alguns exemplos e explicaremos sua relação com as transformações contráteis.

Denotaremos por  $\mathcal{G}_k$  o conjunto dos subgrafos completos com  $k + 1$  vértices do grafo  $G$ . Os elementos de  $\mathcal{G}_k$  também são chamados **cliques** do grafo. Por exemplo,  $\mathcal{G}_0$  é o conjunto dos vértices de  $G$ ,  $\mathcal{G}_1$  é o conjunto das arestas de  $G$  e  $\mathcal{G}_2$  é o conjunto dos triângulos de  $G$ . Denotando a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{G}_k$  por  $g_k$ , temos que

**Definição 3.4.1.** (KNILL, 2012) *A característica de Euler de um grafo  $G$  é dada por*

$$\chi(G) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k g_k$$

*sendo  $g_k$  quantidade de subgrafos completos de  $G$  com  $k + 1$  vértices.*

A característica de Euler dos grafos do tipo linha, estrela e árvores sempre será igual a 1, como nesses grafos não temos cliques de tamanho maior que 2, para calcular a característica de Euler sempre teremos a diferença entre a quantidade de vértice e arestas, isto é, a diferença entre a quantidade de  $K_1$  e a quantidade de  $K_2$ . Isso sempre será igual a 1.

Para os grafos do tipo roda  $W_n$ , temos  $n + 1$  vértices,  $2n$  arestas, e  $n$  triângulos, logo  $\chi(W_n) = n + 1 - 2n + n = 1$ .

Para os grafos do tipo ciclo, com mais de 4 vértices, sempre temos o mesmo número de vértices e arestas logo a característica de Euler desses grafos será igual a 0, uma vez

que eles também não possuem cliques de tamanho maior que 2. A restrição do número de vértices é justificada porque se temos um  $C_3$ , ele possui como subgrafos completos 3 vértices ( $K_1$ ), 3 arestas ( $K_2$ ) e 1 triângulo ( $K_3$ ), logo a característica de Euler de um  $C_3$  será 1. Recorde que um grafo  $C_3$  também é considerado um  $K_3$ .

Sabemos que os grafos do tipo ciclo, com 4 ou mais vértices não são contráteis, já os grafos do tipo linha, estrela, árvores, roda são contráteis e destes todos tem característica de Euler igual a 1. A relação entre a característica de Euler e a contratibilidade é dada por.

**Teorema 3.4.2.** (IVASHCHENKO, 1993) *A característica de Euler de um grafo contrátil é igual a 1.*

**Teorema 3.4.3.** (IVASHCHENKO, 1993) *A característica de Euler de um espaço não se altera sob transformações contráteis.*

Para as demonstrações dos teoremas precisaremos de alguns resultados preliminares, antes disso faremos alguns comentários. Uma importante noção que devemos ter a respeito dos invariantes, nesse caso a característica de Euler, é que se temos dois espaços digitais (grafos), calculamos a característica de cada um deles e os resultados são diferentes então não temos a equivalência dos espaços, isto é, não podemos transformar um grafo no outro utilizando as transformações contráteis. No entanto, a recíproca não é verdadeira, se os resultados da característica de Euler de dois espaços digitais coincidem nada podemos afirmar.

Por esse motivo, perceba que o Teorema 3.4.2 nos fornece uma condição necessária mas que não é suficiente para “atalhar” a investigação da contratibilidade de um espaço. Se desejamos saber se um espaço digital  $G$  é contrátil, podemos calcular  $\chi(G)$ , se  $\chi(G) \neq 1$ , então o espaço não pode ser contrátil, conforme o Teorema 3.4.2. Se  $\chi(G) = 1$  nada podemos afirmar, devemos de fato procurar pela sequência de vértices simples que após a sucessiva deleção nos forneça o grafo trivial.

Seja  $G$  um grafo. Denotando por  $n_k$  a quantidade de subgrafos completos de  $G$  com  $k$  vértices. O vetor

$$f(G) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$$

é o  $f$ -vetor do grafo  $G$ .

**Lema 3.4.4.** *A característica de Euler de um grafo completo é igual a 1.*

*Demonstração.* A prova segue facilmente por indução. □

**Lema 3.4.5.** *A característica Euler de um grafo do tipo cone, a  $\oplus G$ , é igual a 1.*

*Demonstração.* Seja  $f(G) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$  o  $f$ -vetor de  $G$ . Claramente, qualquer subgrafo completo  $K_n$  em  $G$  pode ser convertido em  $a \oplus K_n = a \oplus K_{n+1}$  em  $a \oplus G$ . Dessa forma, o  $f$ -vetor de  $a \oplus G$  será  $f(a \oplus G) = (n_1 + 1, n_2 + n_1, \dots, n_s + n_{s-1}, n_s)$ . Com isso teremos que a soma alternada da característica de Euler de  $a \oplus G$  será igual 1.  $\square$

Sejam  $G$  um grafo e  $a_1, a_2 \notin G$ , o grafo  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G) - \{(a_1 a_2)\}$  será denotando por  $(a_1, a_2) \oplus G$ .

**Lema 3.4.6.** *Seja  $G$  um grafo. Então  $\chi((a_1, a_2) \oplus G) = 2 - \chi(G)$ .*

*Demonstração.* Seja  $f(G) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$  o  $f$ -vetor de  $G$ . Qualquer subgrafo completo  $K_n$  de  $G$  se transformará em dois subgrafos em  $a_1 \oplus K_n$  e  $a_2 \oplus K_n$ , no grafo  $(a_1, a_2) \oplus G$ . Desse forma o  $f$ -vetor de  $(a_1, a_2) \oplus G$  será da forma

$$f((a_1, a_2) \oplus G) = (n_1 + 2, n_2 + 2n_1, \dots, n_s + 2n_{s-1}, n_s)$$

que implica que a característica de Euler de  $(a_1, a_2) \oplus G$  será dada por

$$\chi((a_1, a_2) \oplus G) = 2 - \chi(G).$$

$\square$

Do Lema 3.4.6 segue o seguinte corolário:

**Corolário 3.4.7.** *Se  $\chi(G) = 1$ , então  $\chi((a_1, a_2) \oplus G) = 1$ .*

Sejam  $G$  um grafo e  $H$  um subgrafo de  $G$ ,  $H \subseteq G$ . A conexão entre o  $f$ -vetor e a característica de Euler é dada pelas seguintes propriedades:

- (1)  $f(H) = (m_1, m_2, \dots, m_r)$
- (2)  $f(G) = (n_1 + m_1, n_2 + m_2, \dots, n_s + m_s)$
- (3)  $\chi(H) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} m_k$
- (4)  $\chi(G) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} (m_k + n_k) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(H)$

Em que  $m_k$  é o número de subgrafos completos  $K_k$  cujos vértices estão em  $H$  e  $n_k$  é o número de subgrafos completos  $K_k$  para os quais pelo menos um vértice não se encontra em  $H$ .

*Demonstração.* Primeiramente vamos descrever o conjunto  $S$  composto por grafos contráteis, começando do grafo trivial e aplicando as operações remover/colar vértices simples e remover/colar arestas simples. Suponha que temos este conjunto  $S$ ,  $S = (G_1, G_2, \dots, G_n)$  e a característica de Euler para qualquer grafo do conjunto  $S$  é 1.

1. Seja  $G = G_n$  e  $G_l \subseteq G_n$ . Como  $\chi(G_n) = \chi(G_l) = 1$ , das propriedades (1) – (4) podemos escrever  $\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k$ . Cole o vértice  $a$  ao grafo  $G_l$  de modo que  $O(a) = G_l$ . Obteremos o grafo  $U$ , com  $U = \{a\} \cup G_l$ . Observe que todo  $K_r$  pertencente a  $G_l$  é transformado em  $K_{r+1}$  e os demais permanecem sem alteração. Consequentemente, os números  $n_k$  em (1) – (4) são mantidos. Como  $a \oplus G_l$  é contrátil e  $\chi(a \oplus G_l) = 1$ , pelo Lema 3.4.5, então

$$\chi(\{a\} \cup G) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a \oplus G_l) = \chi(G) = 1.$$

2. Suponha que escolhemos o grafo  $G_n$ ,  $G_n = U$ , e  $a \in U$  de tal modo que  $O(a) = G_l$ . Das propriedades (1) – (4), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \chi(U) &= \chi(G_l) = \chi(a \oplus G_l) = 1 \\ \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k &= \chi(U) - \chi(a \oplus G_l) = 0 \end{aligned}$$

Agora, delete o vértice  $a$ . O grafo  $U$  passa a ser o grafo  $U - \{a\}$ , seu subgrafo  $a \oplus G_l$  passa a ser  $G_l$ . Vemos que todos os números  $n_k$  são mantidos. Consequentemente,

$$\chi(U - \{a\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(G_l) = 1.$$

3. Sejam  $G = G_n$ ,  $a_1, a_2 \in G_n$  e  $O(a_1 a_2) = G_l$ . Como antes,  $G_n$  e  $G_l$  pertencem à  $S$ , logo  $\chi(G_n) = \chi(G_l) = 1$ . Do Lema 3.4.6, teremos

$$\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k = \chi(G_n) - \chi((a_1, a_2) \oplus G_l) = 0$$

Coloque a aresta  $(a_1 a_2)$  em  $G_n$ . Obteremos o grafo  $U$ ,  $U = G_n \cup \{(a_1 a_2)\}$ , com subgrafo  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$ . Do Lema 3.4.5,  $\chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = 1$ . Como nos números precedentes  $n_k$  não são alterados. Segue que,

$$\chi(G_n \cup \{(a_1 a_2)\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = 1.$$

4. Suponha que escolhemos o grafo contrátil  $G_n$ ,  $G_n = U$ , e dois de seus vértices adjacentes  $a_1$  e  $a_2$ , tais que  $O(a_1 a_2) = G_l$  seja um grafo contrátil,  $\chi(G_n) = \chi(G_l) = 1$ . Como  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$  é subgrafo de  $G_n$ , pelo Lema 3.4.5, é contrátil. Logo, das propriedades (1) – (4), temos

$$\sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k = \chi(G_n) - \chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = 0.$$

Agora, delete a aresta  $a_1a_2$ . O grafo  $G_n$  passa a ser o grafo  $G_n - \{(a_1a_2)\}$ , seu subgrafo  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$  passa a ser  $(a_1, a_2) \oplus G_l$ , os números  $n_k$  são mantidos. Segue do Lema 3.4.6,

$$\chi(G_n - \{(a_1a_2)\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi((a_1, a_2) \oplus G_l) = 1.$$

□

Finalizada a demonstração do Teorema 3.4.2, vamos para a do Teorema 3.4.3 que também se dará em quatro etapas.

*Demonstração.* 1. Sejam  $G$  um grafo e  $G_l$  um subgrafo contrátil,  $G_l \subseteq G$ . Das propriedades (1) – (4), temos

$$\chi(G) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(G_l), \quad \chi(G_l) = 1$$

Colando um vértice  $a$  a  $G_l$ , de modo que  $O(a) = G_l$ , não mudamos os números  $n_k$ . Obtemos o grafo  $G \cup \{a\}$  com subgrafo  $a \oplus G_l$  (que é contrátil). Pelo Lema 3.4.5,  $\chi(a \oplus G_l) = 1$ , logo

$$\chi(G \cup \{a\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a \oplus G_l) = \chi(G).$$

2. Sejam  $U$  um grafo e  $G_l$  um subgrafo contrátil,  $G_l \subseteq U$  e  $\chi(G_l) = 1$ . Das propriedades (1) – (4), temos

$$\chi(U) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a \oplus G_l), \quad \chi(a \oplus G_l) = 1$$

Delete o vértice  $a$ . O grafo  $U$  passa a ser  $U - \{a\}$ , o subgrafo  $a \oplus G_l$  passa a ser  $G_l$  e os números  $n_k$  não são alterados. Como  $\chi(G_l) = 1$ , temos

$$\chi(U - \{a\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(G_l) = \chi(U).$$

3. Seja  $U$  um grafo e  $a_1, a_2 \in U$  dois vértices adjacentes tais que  $O(a_1a_2) = G_l$ . Das propriedades (1) – (4), temos

$$\chi(U) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)), \quad \chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = 1$$

Delete a aresta  $a_1a_2$ . O grafo  $U$  passa a ser  $U - \{(a_1a_2)\}$ , o subgrafo  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$  passa a ser  $(a_1, a_2) \oplus G_l$  e os números  $n_k$  não mudam. Pelos Lema 3.4.6 e Teorema 3.4.2, se  $G_l$  é contrátil, então  $(a_1, a_2) \oplus G_l$  também será, e  $\chi((a_1, a_2) \oplus G_l) = 1$ . Logo,

$$\chi(U - \{(a_1a_2)\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi((a_1, a_2) \oplus G_l) = \chi(U)$$

4. Seja  $G$  um grafo, com  $a_1, a_2 \in G$  vértices não adjacentes e tais que a interseção de suas vizinhanças é contrátil,  $O(a_1a_2) = G_l$  e  $\chi(G_l)$ . Das propriedades (1) – (4),

$$\chi(G) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi((a_1, a_2) \oplus G_l)$$

Como  $G_l$  é contrátil, então  $(a_1, a_2) \oplus G_l$  também será (Lema 3.4.6 e Teorema 3.4.2) e  $\chi((a_1, a_2) \oplus G_l)$ . Quando adicionamos uma aresta entre  $a_1$  e  $a_2$ , os grafos  $G$  e  $(a_1, a_2) \oplus G_l$  são convertidos em  $G \cup \{(a_1a_2)\}$  e  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$ , não havendo alteração nos números  $n_k$ ,

O grafo  $a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)$  é contrátil, pelo Lema 3.4.5, e  $\chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = 1$ . Segue que,

$$\chi(G \cup \{(a_1a_2)\}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} n_k + \chi(a_1 \oplus (a_2 \oplus G_l)) = \chi(G).$$

□



## 4 Espaços Moleculares

Seja  $E^\infty$  o espaço Euclidiano de dimensão infinita. Tome as coordenadas dos pontos  $x$ , com  $x \in E^\infty$ , como uma sequência de números reais

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = [x_i], \quad i \in \mathbb{N}$$

Define-se o cubo unitário  $D \subset E^\infty$  como o conjunto no qual cada  $x \in D$ , com coordenadas são  $[x_i]$ , satisfaz

$$n_i \leq x_i \leq n_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}$$

Desse modo,  $D$  é um cubo de dimensão infinita com aresta unitária, também o chamaremos de *kirpich*. A posição de  $D$  em  $E^\infty$  é determinada pelas coordenadas da esquerda. Para um dado *kirpich* temos:

$$D = (n_1, n_2, \dots, n_n, \dots) = [n_i], \quad i \in \mathbb{N}$$

Dois *kirpiches* são adjacentes, se eles possuem pontos em comum. A distância entre dois *kirpiches*  $d(D_1, D_2)$ ,  $D_1 = [n_i]$  e  $D_2 = [m_i]$  é definida como

$$d(D_1, D_2) = \max |n_i - m_i|, \quad i \in \mathbb{N}$$

Note que dois *kirpiches* serão adjacentes se suas correspondentes coordenadas distinguem em não mais que 1, ou se a distância entre elas for 1. Qualquer conjunto de *kirpiches* em  $E^\infty$  é chamado de **espaço molecular** e será denotado por  $M$ .

Na prática o espaço euclidiano possui dimensão finita, a utilização do cubo de dimensão infinita é justificada por *Evako* (EVAKO, 1995) para possibilitar a criação de um elemento universal que não dependa da dimensão e que seja adequado para descrever elementos como pontos (dimensão 0), retas (dimensão 1), superfícies (dimensão 2), e assim por diante.

**Definição 4.0.1.** (EVAKO, 1995) *Seja  $A$  uma superfície em  $E^n$ . O espaço molecular  $M(A)$  é o conjunto de kirpiches intersectando  $A$ .*

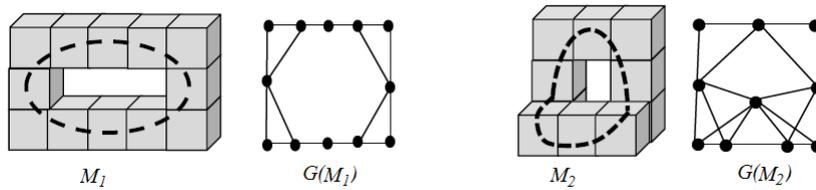


Figura 42: Exemplos de curvas em  $E^3$ , com seus respectivos espaços moleculares e grafos de interseção.

**Definição 4.0.2.** (EVAKO, 1995) O grafo interseção  $G(M(A))$  de  $M(A)$  será chamado de espaço discreto básico de  $A$ .

Qualquer espaço molecular pode ser representado por seu grafo interseção  $G(M)$ , em que os vértices de  $G(M)$  são cada um dos cubos e quando os cubos forem adjacentes haverá uma aresta conectando os respectivos vértices. Foi mostrado que qualquer grafo  $G$  pode ser representado por um espaço molecular  $M(G)$ , tal que  $G = G(M(G))$ .

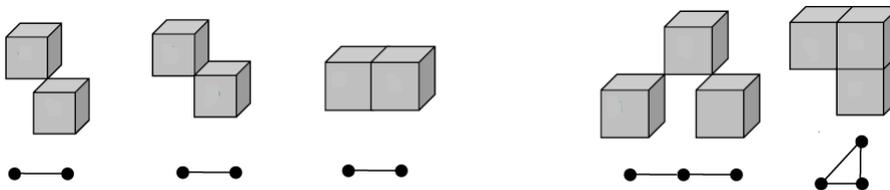
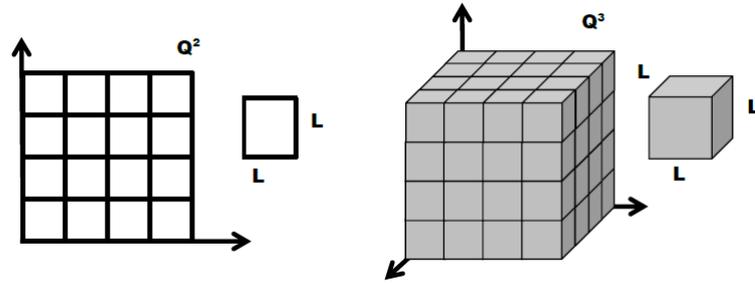


Figura 43: Exemplos de diferentes espaços moleculares que possuem grafos de interseção isomorfos.

Na Figura 43 ilustramos o fato que para um determinado grafo mais de um espaço molecular pode ser construído, existindo um isomorfismo entre tais espaços.

## 4.1 Espaços cúbicos

O  $n$ -espaço cúbico euclidiano  $Q^n$  é construído como o conjunto do espaço euclidiano  $E^n$  dos  $n$ -cubos de comprimento lateral  $L$  e coordenadas de canto no conjunto  $X = \{Lx_1, \dots, Lx_n : x_i \in \mathbb{Z}\}$ . Por construção,  $Q^n$  particiona  $E^n$ . Um espaço cúbico é um conjunto de elementos com o mesmo tamanho e dimensão, abaixo temos exemplos dos espaços cúbicos euclidiano  $Q^2$  e  $Q^3$ .

Figura 44: Exemplos de espaços cúbicos  $Q^2$  e  $Q^3$ .

Diremos que  $M$  é um espaço cúbico se  $M$  é um subconjunto de  $Q^n$ . Se os  $n$ -cubos  $u_i$  e  $u_j$  pertencem a  $M$  e  $u_i \cap u_j \neq \emptyset$ , então  $u_i \cap u_j$  é uma  $p$ -dimensional face, isto é um  $p$ -cubo, com  $0 \leq p \leq n - 1$ . A união  $I(M) = \bigcup \{u_i \mid u_i \in M\}$  de todos os  $n$ -cubos de  $M$  é chamada a **imagem** de  $M \in E^n$ .

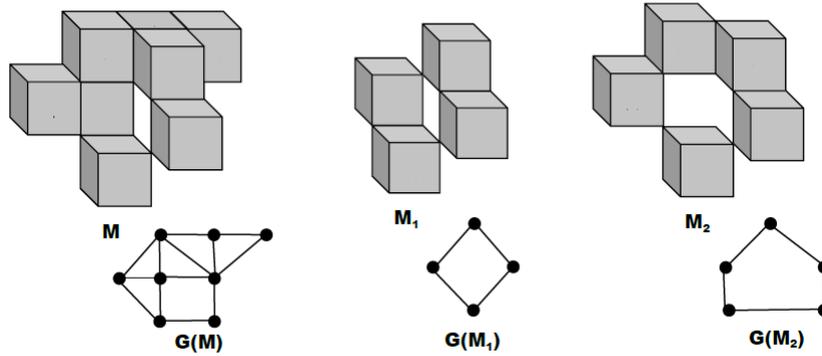


Figura 45: Exemplos de espaços cúbicos.

O subespaço  $O(u_i)$  do espaço cúbico  $M = \{u_1, u_2, \dots\}$  contendo todos os  $n$ -cubos intersectando  $u_i$  é chamado a **vizinhança** de  $u_i$  em  $M$ , o subespaço  $U(u_i) = u_i \cup O(u_i)$  é chamado a **bola** de  $u_i$ .

Seja  $M = \{u_1, u_2, \dots\}$  um espaço cúbico. O grafo interseção  $G(M)$  de  $M$  com pontos  $\{x_1, x_2, \dots\}$  é chamado o **modelo digital** de  $M$  se os pontos  $x_i$  e  $x_j$  são adjacentes sempre que  $u_i \cap u_j \neq \emptyset$ , isto é,  $f : G(M) \rightarrow M$  tal que  $f(x_i) = u_i$  é um isomorfismo.

**Definição 4.1.1.** (EVAKO, 2014) Um espaço cúbico  $M = \{u_1, u_2, \dots\}$  é chamado **contrátil** se ele pode ser convertido para um  $n$ -cubo por sequencial deleção de  $n$ -cubos simples. Um  $n$ -cubo  $u_i$  de um espaço cúbico  $M = \{u_1, u_2, \dots\}$  é dito ser **simples** se sua vizinhança  $O(u_i)$  é um espaço cúbico contrátil.

Segue imediatamente da definição que, (EVAKO, 2014),

**Corolário 4.1.2.** Seja  $M$  um espaço cúbico contrátil. Se  $u$  é um  $n$ -cubo simples de  $M$  então o espaço cúbico  $M - \{u\}$  é contrátil.

**Proposição 4.1.3.** (EVAKO, 2014) *Se  $M$  é um espaço cúbico contrátil, então a imagem  $I(M)$  tem o tipo de homotopia de um ponto no sentido da topologia algébrica.*

Antes de verificar a Proposição 4.1.3 cabe explicar o significado de “ter o tipo de homotopia de um ponto”. Uma das principais ideias da Topologia Algébrica é considerar dois espaços sendo equivalentes se eles têm “o mesmo formato” num sentido que é muito mais amplo do que por homeomorfismos. É bastante comum utilizar as letras do alfabeto para ter noções intuitivas de algumas definições, reproduziremos aqui as ideias encontradas em (HATCHER, 2002).

As letras do alfabeto podem ser escritas como uniões de um número finito de segmentos de reta e curva, ou ainda em formas “grossas” que são subsuperfícies compactas do plano delimitadas por curvas fechadas simples. Em cada caso, a letra fina é um subespaço da letra grossa, e nós podemos continuamente encolher a letra grossa para a fina. Uma boa maneira de fazer isso é decompor uma letra grossa, chame-a  $\mathbf{X}$ , em segmentos de reta que conectam cada ponto da fronteira exterior de  $\mathbf{X}$  para um único ponto da fina  $X$ , como indicado na Figura 46. Então, podemos encolher  $\mathbf{X}$  até obter  $X$ , deslizando cada ponto de  $\mathbf{X} - X$  até  $X$  ao longo do segmento de reta que o contém. Os pontos que já estão em  $X$  não se movem.

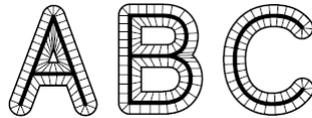


Figura 46: Ilustração de como proceder para obter encolhimento de letras no plano.

Podemos pensar deste processo de encolhimento como tendo lugar durante um intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 1$ , então ele define uma família de funções  $f_t : \mathbf{X} \rightarrow X$  parametrizada por  $t \in I = [0, 1]$ , onde  $f_t(x)$  é o ponto para o qual um determinado ponto  $x \in \mathbf{X}$  se moveu no momento  $t$ .

Seria mais interessante se  $f_t(x)$  dependesse continuamente de ambos  $t$  e  $x$ . Isso será verdade, temos cada  $x \in \mathbf{X} - X$  se movendo ao longo de seu segmento de reta a uma velocidade constante, de modo a atingir o seu ponto de imagem em  $X$  no tempo  $t = 1$ , enquanto os pontos  $x \in X$  estão estacionados. Exemplos desse tipo levam à seguinte definição geral. Uma **retração por deformação** de um espaço  $X$  sobre um subespaço  $A$  é uma família de mapas  $f_t : X \rightarrow X$   $t \in I$ , de tal modo que  $f_0 = 1$  (o mapa de identidade),  $f_1(X) = A$ , e  $f_t|_A = 1$  para todo  $t$ . A família  $f_t$  deve ser contínua no sentido de que o mapa associado  $X \times I \rightarrow X$ ,  $(x, t) \mapsto f_t(x)$ , são contínuos.

Uma **homotopia** é qualquer família de mapas  $f_t : X \rightarrow Y$ ,  $t \in I$ , de tal modo que o mapa associado  $F : X \times I \rightarrow Y$  dado por  $F(x, t) = f_t(x)$  é contínuo. Dois mapas  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  são *homotópicos* se existe uma homotopia  $f_t$  conectando-os, e escreve-se

$f_0 \simeq f_1$ . Um espaço que tem o tipo de homotopia de um ponto é chamado contrátil. Isso equivale à exigência de que o mapa identidade do espaço é nulo-homotópico, ou seja, é homotópico a um mapa constante, (HATCHER, 2002).

*Demonstração.* A prova é realizada por indução no número  $|M|$ , a quantidade de  $n$ -cubos de  $M$ . Para  $|M| = 1, 2, 3$ , a proposição é claramente verdadeira. Por exemplo, as imagens de todos os espaços cúbicos representados na Figura 43 podem ser encolhidas continuamente até um ponto. Suponha que a proposição é válida sempre que  $|M| < k$ . Considere  $|M| = k$ , como  $M$  é um espaço cúbico contrátil ele contém um  $n$ -cubo simples, chamemo-os de  $x$ . Isso nos diz que a vizinhança de  $x$ ,  $O(x)$ , é um espaço cúbico contrátil, a bola  $U(x) = O(x) \cup x$  é um espaço cúbico contrátil e  $M - x$  é um espaço cúbico contrátil, conforme a Definição 4.1.1. Sem perda de generalidade, suponha que  $|O(x)| < k - 1$ . Então  $O(x)$  é uma retração por deformação de  $O(x) \cup x$  e  $M - \{x\}$ , ou seja, a imagem  $I(O(x) \cup x)$  e  $I(M - \{x\})$  pode ser deformada continuamente na imagem  $I(O(x))$ . Isto significa que a imagem  $I(M)$  pode ser deformada continuamente para a imagem  $I(O(x))$ . Uma vez que  $I(O(x))$  tem o tipo de homotopia de um ponto, então  $I(M)$  tem o tipo de homotopia de um ponto.  $\square$

**Definição 4.1.4.** (EVAKO, 2014)

- Os espaços cúbicos  $M$  e  $N$  são chamados **homotopicamente equivalentes** se um pode ser convertido no outro por uma deleção ou colagem sequencial de  $n$ -cubos simples.
- Um espaço cúbico está comprimido se ele não contém um  $n$ -cubo simples.

Tem-se que um espaço cúbico contrátil comprimido  $M$  contém um único  $n$ -cubo.

**Proposição 4.1.5.** (EVAKO, 2014) Se  $M$  e  $N$  são espaços cúbicos homotopicamente equivalentes, então as imagens  $I(M)$  e  $I(N)$  são espaços topológicos homotopicamente equivalentes.

**Proposição 4.1.6.** (EVAKO, 2014) Seja  $M = \{u_1, u_2, \dots\}$  um espaço cúbico e  $G(M) = \{x_1, x_2, \dots\}$  o grafo interseção de  $M$ . Se  $M$  é um espaço cúbico contrátil então  $G(M)$  é um grafo contrátil.

A prova é realizada por indução no número  $|M|$ , a quantidade de  $n$ -cubos de  $M$ . Para  $|M| = 1, 2, 3$ , a proposição é claramente verdadeira. Por exemplo, todos os espaços cúbicos representados na Figura 43 possuem grafos de interseção contráteis. Suponha que a proposição é válida sempre que  $|M| < k$ . Considere  $|M| = k$ , como  $M$  é um espaço cúbico contrátil ele contém um  $n$ -cubo simples, chamemo-os de  $u$ . Então a vizinhança de  $x$ ,  $O(u)$ , é um espaço cúbico contrátil, a bola  $U(u) = O(u) \cup u$  é um espaço cúbico

contrátil e  $M - u$  é um espaço cúbico contrátil, conforme a Definição 4.1.1. Sem perda de generalidade, suponha que  $|O(u)| < k - 1$ . Sejam  $x$  o ponto de  $G(M)$  associado a  $u$ ,  $O(x)$  a vizinhança de  $x$ ,  $U(x) = O(x) \cup x$  a bola de  $x$  e  $G(M) - x$  o grafo obtido deletando  $x$  de  $G(M)$ . Os grafos de interseção  $G(O(u)) = O(x)$ ,  $G(U(u)) = U(x)$  e  $G(M - u) = G(M) - x$  são todos grafos contráteis por hipótese de indução. Dessa forma,  $G(M)$  é um grafo contrátil.

O próximo corolário segue da Definição 3.2.3 e da Proposição 4.1.6.

**Corolário 4.1.7.** *Seja  $M$  um espaço cúbico contrátil.*

- *Se  $|M| > 1$  então  $M$  contém pelo menos dois  $n$ -cubos simples.*
- *Se  $N \subset M$  é um subespaço cúbico contrátil de  $M$  então  $M$  pode ser convertido para  $N$  por deleção sequencial de  $n$ -cubos simples.*

## 5 Variedades Digitais

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos de Esferas e Variedades Digitais, para isso os conceitos e resultados a respeito da contratibilidade vistos anteriormente serão fundamentais.

### 5.1 Esferas Digitais

**Definição 5.1.1.** (EVAKO, 2015) Uma *0-esfera digital* é um grafo desconexo com apenas dois vértices  $a$  e  $b$ , denotado por  $S^0(a, b)$ .

Para definir  $n$ -esfera digital,  $n > 0$ , é utilizada a definição recursiva:

**Definição 5.1.2.** (EVAKO, 2015) Um espaço digital conexo  $M$  é chamado de  *$n$ -esfera digital*,  $n > 0$ , se para qualquer vértice  $v \in M$ , a borda  $O(v)$  é uma  $(n - 1)$ -esfera e o espaço  $M - v$  é um espaço contrátil. Se  $M$  é uma  $n$ -esfera digital,  $n > 0$ , e  $v$  um vértice pertencente a  $M$ . O espaço  $D = M - v$  é chamado de  *$n$ -disco digital*.

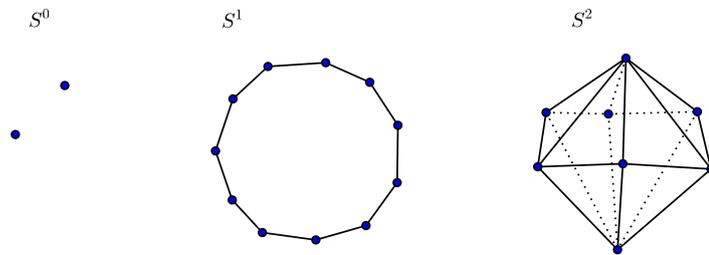


Figura 47: Exemplos de esferas digitais.

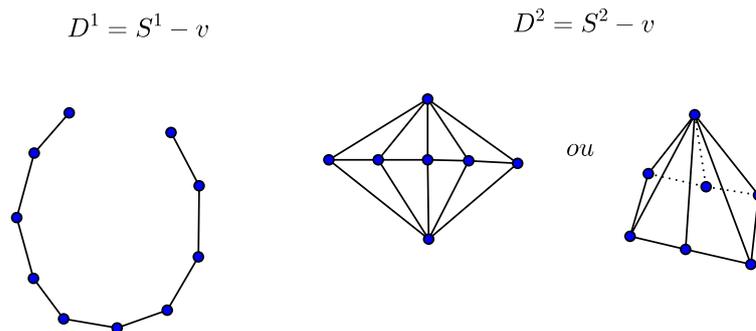


Figura 48: Exemplos de discos digitais.

Um  $n$ -disco digital pode ser representado pela união

$$D = \partial D \cup \text{Int}D$$

Em que  $\partial D = O(v)$  é uma  $(n - 1)$ -esfera e  $\text{Int}D = D - \partial D$ .

Os espaços  $\text{Int}D$  e  $\partial D$  são chamados **o interior** e **a fronteira** de  $D$ , respectivamente. Daqui em diante, para abreviar espaços digitais, utilizaremos apenas espaços.

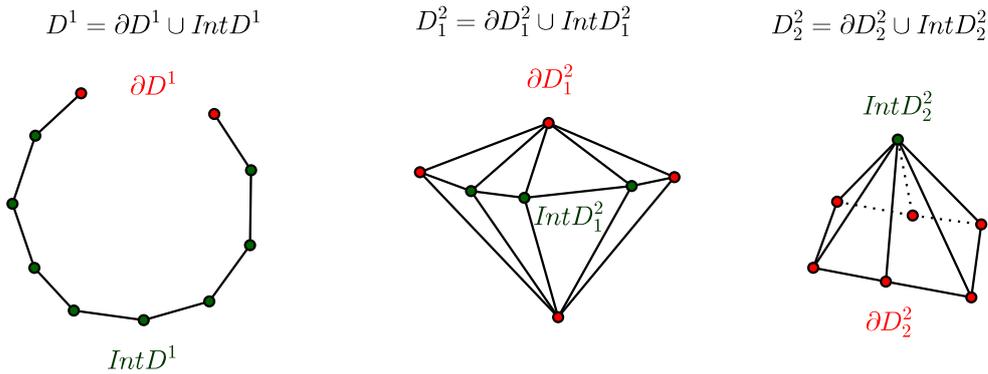


Figura 49: Ilustração de fronteira e interior de discos digitais.

A borda  $O(x)$  é uma  $(n - 1)$ -esfera se o ponto  $x \in \text{Int}D$  e a borda  $O(x)$  é um  $(n - 1)$ -disco se  $x \in \partial D$ .

**Proposição 5.1.3.** (EVAKO, 2015) A soma de  $(n + 1)$  cópias de 0-esferas,

$$S_{min}^n = S_1^0 \oplus S_2^0 \oplus \cdots \oplus S_{n+1}^0$$

é uma  $n$ -esfera.

*Demonstração.* A prova será por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , a proposição é claramente verdadeira, ver a Figura 50.

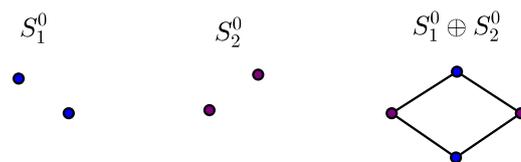


Figura 50: Ilustração de  $S^0 \oplus S^0 = S^1$ .

Suponha que a proposição é válida para  $n$ , devemos mostrar que ela será verdadeira para  $n + 1$ .

Seja  $v \in S_{min}^n$ . Então,  $O(v) = S_{min}^{n-1}$  por construção, isto é,  $O(v)$  é uma  $(n-1)$ -esfera minimal. Portanto,  $S_{min}^n$  é uma  $n$ -esfera.

Evidentemente,  $S_{min}^n - v = u \oplus O(v)$ , onde  $u$  é o único vértice, que não pertence a  $O(v)$ . Este é um espaço contrátil de acordo com a Proposição 3.3.1. Assim,  $S_{min}^n$  é uma  $n$ -esfera.  $\square$

**Definição 5.1.4.** (EVAKO, 2015) A soma de  $(n+1)$  cópias de 0-esferas,

$$S_{min}^n = S_1^0 \oplus S_2^0 \oplus \cdots \oplus S_{n+1}^0$$

é chamada de  $n$ -esfera digital minimal.

**Proposição 5.1.5.** (EVAKO, 2015) Qualquer  $n$ -esfera  $M$  pode ser convertida para a  $n$ -esfera minimal,  $S_{min}^n$ , através de transformações contráteis.

*Demonstração.* Já que  $M - v_1 = D = \partial D \cup IntD$  é o  $n$ -disco digital, ou seja, um espaço contrátil, colaremos um vértice simples  $x_1$  a  $M$  de tal maneira que  $O(x_1) = D$ .

No espaço obtido  $N = M \cup x_1$ , qualquer vértice  $y$  pertencendo a  $IntD$  é simples pois  $O(y)_N = x_1 \oplus (O(y))$ , ou seja, um espaço contrátil de acordo com a Proposição 3.3.1. Portanto, este vértice pode ser excluído de  $N$ . Deletando todos esses vértices e considerando o espaço obtido  $M_1 = S^0(v_1, x_1) \oplus S(v_1)$ , em que  $O(v_1) = O(x_1)$ . Temos que  $M_1$  é uma  $n$ -esfera digital por construção. Seja um vértice  $v_2 \in O(v_1)$ .  $M_1 - v_2 = D_2$  é um  $n$ -disco digital.

Usando o mesmo procedimento, obtemos a esfera digital

$$M_2 = S^0(v_1, x_1) \oplus S^0(v_2, x_2) \oplus O(v_1v_2)$$

Procedendo de maneira análoga, obtém-se a  $n$ -esfera minimal

$$M = S^0(v_1, x_1) \oplus S^0(v_2, x_2) \oplus \cdots \oplus S^0(v_{n+1}, x_{n+1})$$

$\square$

**Proposição 5.1.6.** (EVAKO, 2015) Sejam  $M$  uma  $n$ -esfera e  $G$  um espaço contrátil contido em  $M$ . Então o espaço  $M - G$  é contrátil.

*Demonstração.* Faremos indução em  $n$ . Para  $n = 1$  teremos:

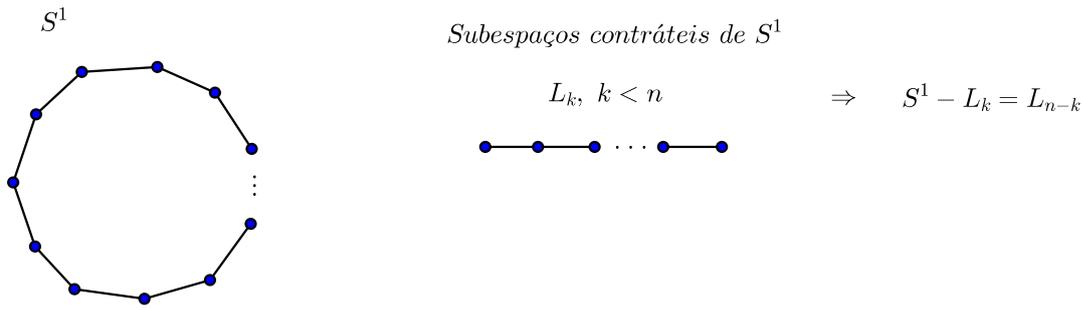


Figura 51: Os subespaços contráteis de uma  $S^1$  são grafos do tipo linha.

Suporemos o resultado verdadeiro para  $n$  e o verificaremos para  $n + 1$ .

Seja  $G$  é um subespaço contrátil de  $M$ ,  $(n + 1)$ -esfera. Como  $G$  é contrátil então existe  $x \in G$  tal que  $O(x)$  é contrátil em  $G$ . Em  $M$ ,  $O(x)$  é uma  $n$ -esfera. Por hipótese de indução, temos que se  $G'$  é um subespaço contrátil de uma  $n$ -esfera  $M'$ , então  $M' - G'$  é um espaço contrátil. Em  $M$  teremos que  $O(x) - G' = O(x) \cap (M - G)$  é um espaço contrátil, em que  $G'$  é a parte de  $G$  que pertence à  $O(x)$ . Sendo assim,  $x$  é um ponto simples em  $(M - G) \cup \{x\}$  e esse grafo é homotópico ao grafo  $M - G$ .

Considere agora o espaço  $G_1 = G - x$ , o espaço  $P = M - G_1 = (M - G) \cup \{x\}$  é homotópico a  $M - G$ , pois passamos de um para o outro por meio de uma transformação contrátil, uma vez que  $x$  é um vértice simples, pois  $O(x)$  em  $P$  é o mesmo que em  $M - G$ . Fazendo esse procedimento para todos os vértices de  $G$ , vamos obtendo em cada passo um novo espaço homotópico a  $M - G$ , até que tenhamos convertido o espaço  $G$  a um único vértice, digamos  $v$ . Temos que  $M - v$  é homotópico a  $M - G$ , e pela definição de  $n$ -esfera digital sabemos que  $M - v$  é um espaço contrátil. Logo,  $M - G$  será contrátil pois é homotópico a  $M - v$ .

□

## 5.2 Variedades Digitais

**Definição 5.2.1.** (EVAKO, 2015) Um espaço conexo  $M$  é chamado de  *$n$ -variedade digital* ou  *$n$ -variedade*,  $n > 1$ , se a borda  $O(v)$  de qualquer ponto  $v$  é uma  $(n - 1)$ -esfera. Seja  $M$  uma  $n$ -variedade e um ponto  $v$  pertencente a  $M$ . O espaço  $N = M - v$  é chamado uma  *$n$ -variedade com a fronteira (esférica)  $\partial N = O(v)$*  e o interior  $IntN = N - \partial N$ .

Devemos notar que a  $n$ -esfera digital é uma  $n$ -variedade digital, mas a recíproca não é verdadeira. Se  $M$  é uma  $n$ -esfera digital para caracterizá-la como tal, devemos cumprir a exigência de que o espaço  $M - v$  seja contrátil, para todo vértice  $v \in M$ . Neste trabalho, teremos apenas as  $n$ -variedades conexas,  $n > 0$ .

Apresentaremos alguns exemplos 2-variedades digitais, mais adiante os nomes que utilizamos serão justificados, pois calcularemos a característica de Euler de cada uma delas. O primeiro exemplo de uma variedade digital que não seja a esfera digital é o **2-Toro digital**, representado na Figura 52. Para evitar o cruzamento de várias arestas preferimos utilizar a identificação dos vértices, isto é, vértices com o mesmo rótulo são necessariamente os mesmos. Na Figura 53 destacamos a vizinhança de um vértice, confirmando que temos de fato uma  $S^1$ .

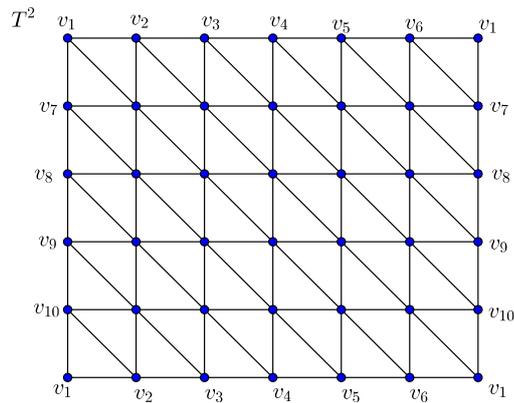


Figura 52: Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Toro digital.

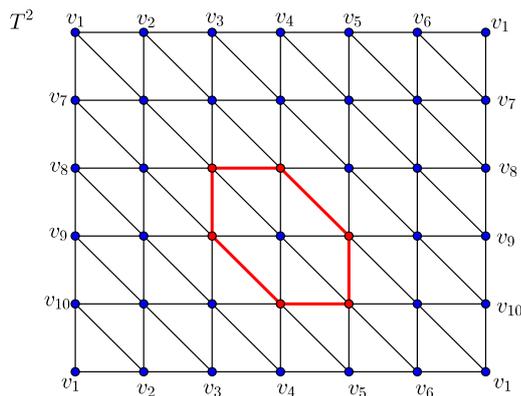


Figura 53: Vizinhança de um vértice no 2-Toro Digital.

Por conta dessa escolha na representação exibiremos as vizinhanças dos vértices que precisam de maior atenção, como o é o caso de  $v_1 \in T^2$  na Figura 54.

Temos na Figura 55 um **2-Plano Projetivo** digital.

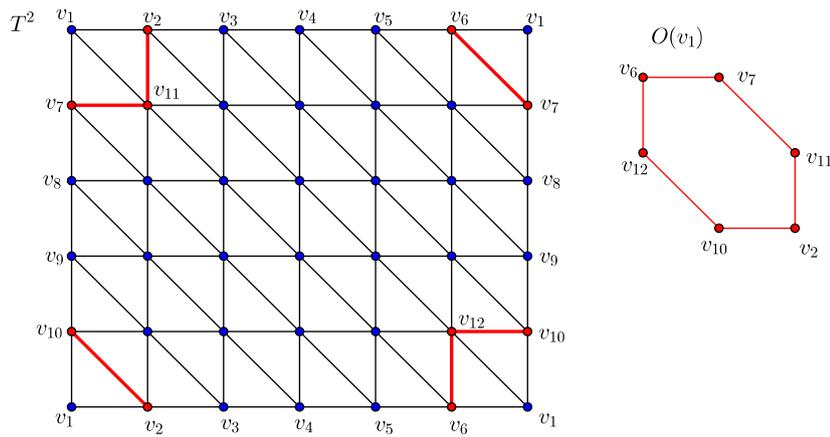


Figura 54: Vizinhança de um vértice no 2-Toro Digital.

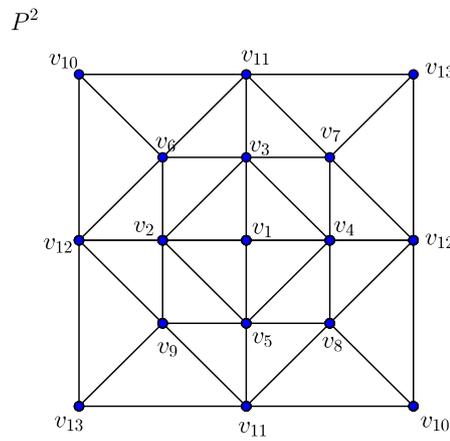


Figura 55: Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Plano Projetivo digital.

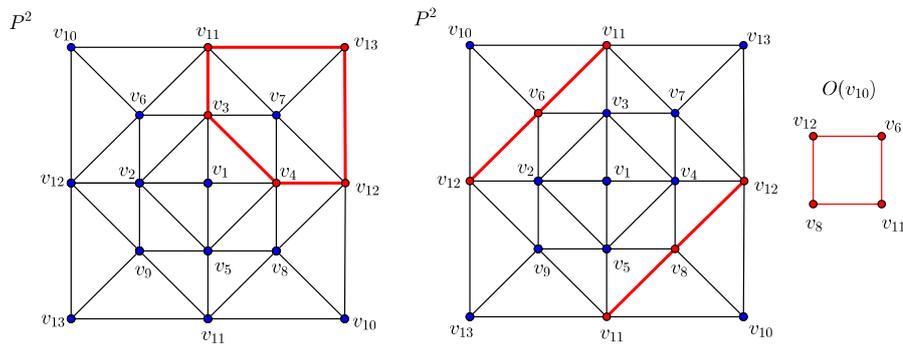


Figura 56: Vizinhanças de vértices no 2-Plano Projetivo digital.

Na Figura 57 ilustramos um espaço chamado **2-Bitoro** digital. O fato de nossa representação ter duas “peças” não significa que o espaço é desconexo, mas sim que preferimos evitar cruzamentos de muitas arestas e dificultar a compreensão.

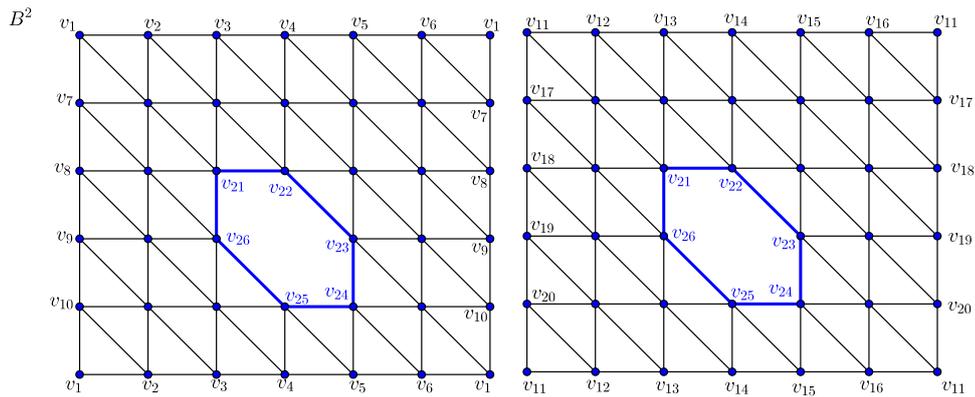


Figura 57: Exemplos de uma 2-variedade digital: 2-Bitoro digital.

Recorde que para verificarmos que um espaço digital conexo é uma  $n$ -variedade digital devemos checar se a vizinhança de todos os seus vértices é uma  $n - 1$ -esfera. Para o 2-Bitoro, verificaremos a vizinhança do vértice  $v_{22}$ .

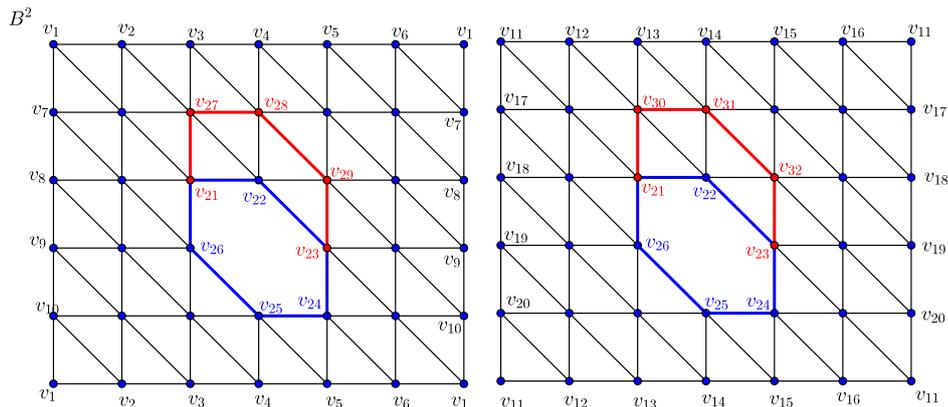


Figura 58: Vizinhança de um vértice no 2-Bitoro digital.

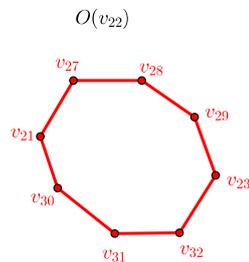


Figura 59: Verificação que a vizinhança é uma 1-esfera digital.

### 5.2.1 Característica de Euler e Variedades Digitais

Como dito, exibimos na Tabela 1 a característica de Euler das Variedades Digitais já vistas.

	$g_0$	$g_1$	$g_2$	$\chi(G)$
$S^0$	2	0	0	$\chi(S^0) = 2$
$S_{min}^1$	4	4	0	$\chi(S^1) = 4 - 4 = 0$
$S_{min}^2$	6	12	8	$\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$
$T^2$	30	90	60	$\chi(T^2) = 30 - 90 + 60 = 0$
$P^2$	13	36	24	$\chi(P^2) = 13 - 36 + 24 = 1$
$B^2$	53	162	108	$\chi(B^2) = 53 - 162 + 108 = -2$

Tabela 1: Característica de Euler de Variedades Digitais

Em que  $g_k$  é a quantidade de subgrafos completos com  $k + 1$  vértices do grafo  $G$ .

De nossos comentários a respeito do uso do invariante, podemos concluir que, topologicamente as variedades  $S_{min}^2$ ,  $T^2$ ,  $P^2$  e  $B^2$  são todas 2-variedades digitais distintas.

Finalizamos o capítulo ressaltando que os resultados obtidos coincidem com a característica de Euler das respectivas variedades topológicas do caso contínuo.

Em (LEE, 2010) encontra-se a seguinte proposição:

**Proposição 5.2.2.** (*Característica de Euler para Superfícies Compactas*).

*A característica de Euler para a apresentação padrão da superfície é igual a:*

- (a) 2 para a esfera,
- (b)  $2 - 2n$  para soma conexa de  $n$  toros,
- (c)  $2 - n$  para soma conexa de  $n$  planos projetivos.

## 6 Transformações em uma $n$ -variedade digital

Descreveremos nessa capítulo transformações em variedades digitais que preservam sua topologia local, em outras palavras, que mantêm a topologia da vizinhança dos vértices. Apresentaremos duas Homotopias especiais entre Variedades Digitais: a *R-Transformação* e a *Compressão*. Ambas as operações modificam a quantidade de vértices e arestas dos espaços, mas preservam a topologia. Um importante fato é que a Característica de Euler de uma variedade digital é um invariante topológico preservado por ambas homotopias.

### 6.1 $R$ -Transformações de $n$ -variedades digitais

Iniciaremos realizando uma transformação que aumenta o número de vértices da variedade.

**Definição 6.1.1.** (EVAKO, 2015) *Sejam  $M$  uma  $n$ -variedade,  $v$  e  $u$  vértices adjacentes em  $M$ . Cole o vértice  $x$  a  $M$  de modo que  $O(x) = u \oplus (v \oplus O(uv))$ , e delete a aresta  $(uv)$ . Esta dupla de transformações contráteis é chamada de  $R$ -transformação, denotada por  $R : M \rightarrow N$ . O espaço obtido  $N$  é denotado por  $N = RM = (M \cup \{x\}) - (uv)$ .*

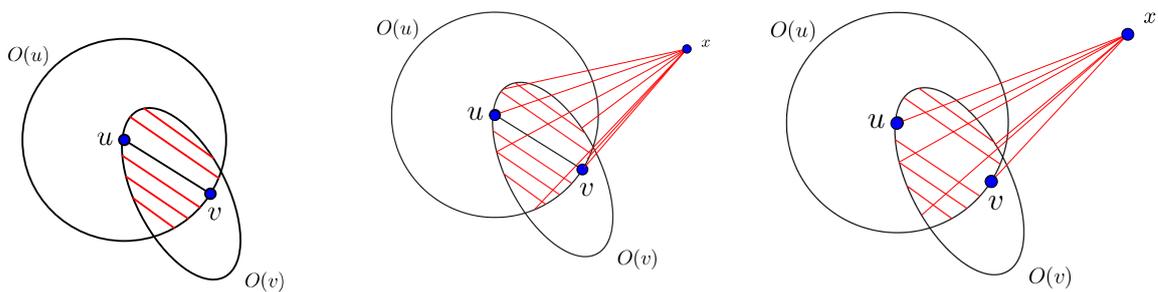


Figura 60: Ilustração das etapas de uma  $R$ -transformação.

A referida dupla de transformações contráteis estão ilustradas na Figura 60, a primeira trata-se da colagem do vértice  $x$  à  $M$ , como  $O(x)$  é um cone, temos que  $x$  é um vértice simples. Na área hachurada em vermelho temos  $v$  e  $u$  conectando-se a todos os vértices pertencentes à  $O(uv)$ . Desse modo a aresta  $uv$  restrita à  $O(x)$  é de fato uma aresta simples e pode ser deletada.

Para melhor ilustrar a  $R$ -transformação vamos realizá-la passo a passo em uma 2-esfera,  $S^2$ . Primeiramente identificar a aresta  $uv \in S^2$  que será removida após a transformação e a interseção  $O(uv)$ .

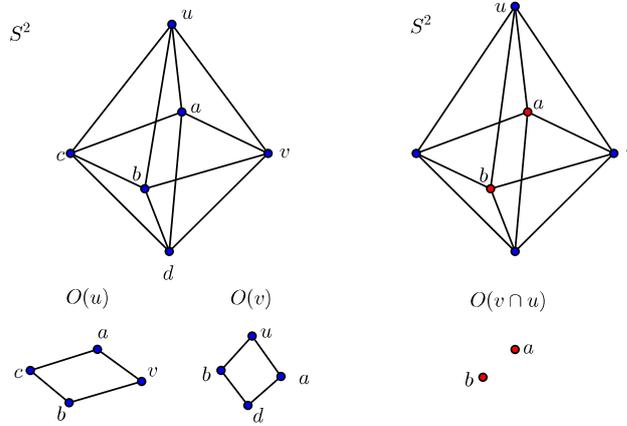


Figura 61: Etapas da  $R$ -transformação em uma  $S^2$ .

Agora, basta colar o vértice  $x$  à  $S^2$  de modo que  $O(x) = u \oplus (v \oplus O(uv))$  e então deletar a aresta  $(uv)$ . Obtemos assim o espaço  $RS^2$ .

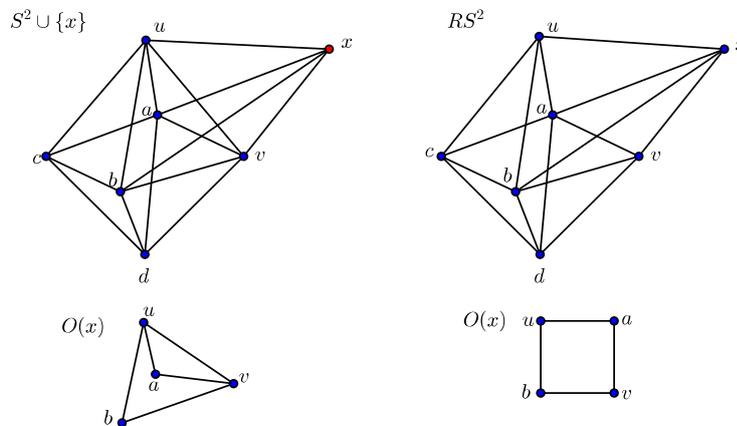


Figura 62: Etapas da  $R$ -transformação em uma  $S^2$ .

As próximas Proposições nos revelam a relação existente entre  $M$  e  $RM$ .

**Proposição 6.1.2.** (EVAKO, 2015) *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade e  $N = RM$  o espaço obtido de  $M$  por uma  $R$ -transformação. Então  $N$  é homotópico equivalente a  $M$ .*

*Demonstração.* Por construção o ponto  $x$  colado a  $M$  é simples pois  $O(x) = u \oplus (v \oplus (uv))$  é contrátil. No espaço  $P = M \cup \{x\}$ , a aresta  $(uv)$  será simples pois  $(O(uv))_P = x \oplus O(uv)$ , podendo portanto ser deletada. Logo  $N = RM = (M \cup \{x\} - (uv))$  é homotopicamente equivalente a  $M$ .  $\square$

**Proposição 6.1.3.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade e  $N = RM$  o espaço obtido de  $M$  por uma  $R$ -transformação. Então  $N$  é uma variedade digital.*

*Demonstração.* □

**Corolário 6.1.4.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade e  $N = RM$  o espaço obtido de  $M$  por uma  $R$ -transformação. Então  $N$  é uma  $n$ -variedade homotopicamente equivalente a  $M$ .*

*Demonstração.* Consequência imediata das Proposições anteriores. □

Como em Teoria dos Grafos, diremos que duas  $n$ -variedades  $M$  e  $N$  são **homeomorfos** se uma pode ser transformada na outra por uma sequência de  $R$ -transformações.

Note que uma  $R$ -transformação aumenta a quantidade de vértices de uma  $n$ -variedade digital, mas as características topológicas das vizinhanças são preservadas.

## 6.2 Compressão de $n$ -variedades digitais

Nessa seção iremos reduzir o número de vértices e arestas de uma  $n$ -variedade digital também utilizando as transformações contráteis.

Em Teoria de Grafos, a contração dos vértices  $x$  e  $y$  em um grafo  $G$ , consiste em substituir ambos por um vértice  $z$  tal que  $z$  preserve as adjacências de  $x$  e  $y$ .

**Definição 6.2.1.** (EVAKO, 2015) *Seja  $D$  um  $n$ -disco digital de uma  $n$ -variedade digital  $M$ ,  $D = \partial D \cup \text{Int}D$ . A contração de  $D$  é a substituição de todos os pontos pertencentes à  $\text{Int}D$  por um único ponto  $z$  tal que,  $z$  é adjacente a todos os pontos pertencentes à  $\partial D$ .*

Para ilustrar a Definição 6.2.1, ilustraremos na Figura 63 a contração do 1-disco digital,  $D^1$ , pertencente a uma  $S^1$ .

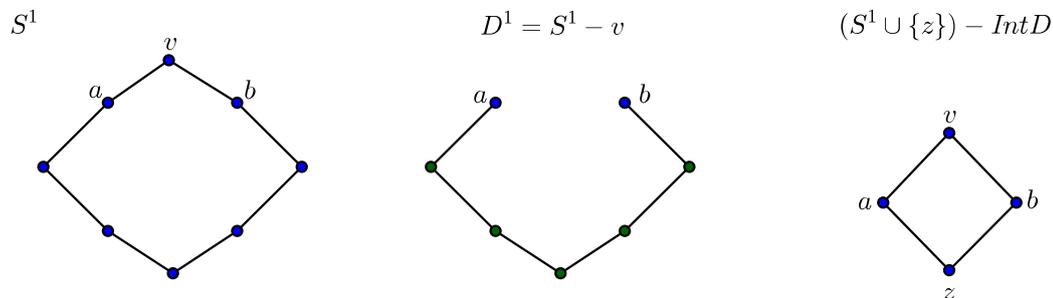


Figura 63: Etapas da  $R$ -transformação em uma  $S^2$ .

Note que foi justamente esse procedimento de contrair discos que foi utilizado na demonstração da Proposição 5.1.5, que qualquer  $n$ -esfera pode ser convertida para a  $n$ -esfera minimal através de transformações contráteis.

**Definição 6.2.2.** (EVAKO, 2015) Uma  $n$ -variedade digital  $M$  é dita **comprimida** se qualquer  $n$ -disco digital de  $M$  é a bola de algum vértice.

**Proposição 6.2.3.** (EVAKO, 2015) Sejam  $D = \partial D \cup \text{Int}D$  um  $n$ -disco digital de uma  $n$ -variedade digital  $M$  e  $C = (M \cup \{z\}) - \text{Int}D$  o espaço obtido pela contração de  $D$ . Então  $N$  é uma  $n$ -variedade digital homotópica equivalente a  $M$ .

*Demonstração.* Recordemos que  $D = M - v$ ,  $v \in M$ . Colaremos o ponto  $z$  de modo que  $O(z) = D$ . Como um  $n$ -disco digital é um espaço contrátil,  $z$  é um vértice simples em  $P = M \cup \{z\}$  e assim  $P$  é homotópico equivalente a  $M$ . Se  $y \in \text{Int}D$ ,  $O(y)$  no espaço  $P$ ,  $O(y)_P$ , é um cone pois é da forma  $y \oplus O(y)_M$  e portanto  $y$  pode ser deletado. Fazendo o mesmo processo de deleção para todos os pontos pertencentes a  $\text{Int}D$  teremos obtido o espaço  $N = (M \cup \{z\}) - \text{Int}D$ . O espaço  $N$  é homotopicamente equivalente ao espaço  $P$ , pois nós o obtivemos a partir de colagem de um ponto simples e de deleções de pontos simples. Como  $P$  é homotopicamente equivalente ao espaço  $M$ , então  $N$  e  $M$  são homotopicamente equivalentes. □

Como consequência imediata dessa Proposição temos o seguinte Corolário:

**Corolário 6.2.4.** (EVAKO, 2015) Uma  $n$ -variedade digital  $M$  pode ser convertida na sua forma comprimida por contração sequencial de  $n$ -discos digitais.

*Demonstração.* Aplicar a Proposição anterior para todos os  $n$ -discos digitais de  $M$ . □

Para ilustrar o que nos diz o Corolário 6.2.4, vamos converter para a forma comprimida uma 2-esfera que possui 20 vértices, é possível pensar na representação desse grafo como um Icosaedro.

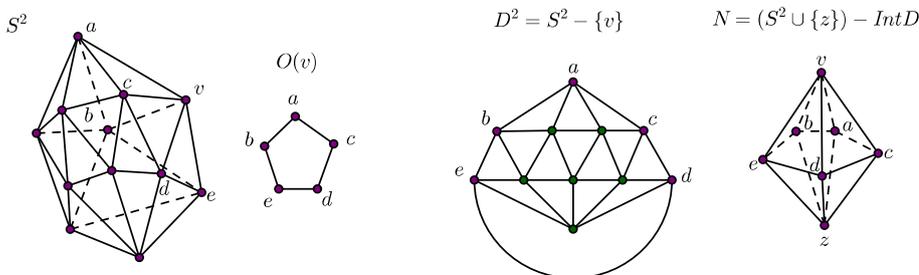


Figura 64: Etapas da compressão de uma  $S^2$ .

Após a compressão do disco escolhido a nova 2-esfera,  $N = (S^2 \cup \{z\}) - \text{Int}D$ , pode ter mais um disco comprimido, conforme mostrado na Figura 65.

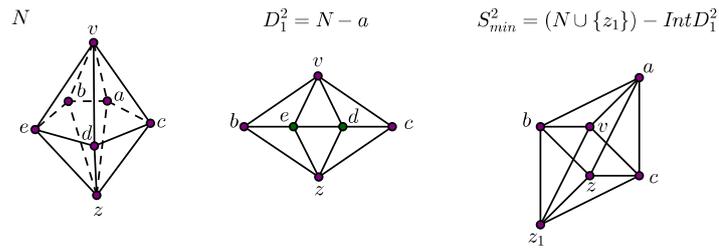


Figura 65: Etapas da compressão de uma  $S^2$ .

O nosso exemplo ilustrou que se  $M$  é uma  $n$ -esfera digital a compressão de  $M$ , denotada por  $CM$ , é a  $n$ -esfera minimal,  $S_{min}^n$ .

**Definição 6.2.5.** (EVAKO, 2015) *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade. Denotando por  $CM$  a  $n$ -variedade obtida da compressão de  $M$  por sequencial contração de todos os digitais  $n$ -discos. Chamamos  $CM$  a **compressão** de  $M$ .*

Como  $|M| \leq |CM|$ , isto nos diz que  $CM$  é mais simples que  $M$  como representante da família de todas as  $n$ -variedades homeomorfas a  $M$ .



## 7 Classificação de uma $n$ -variedade digital

A classificação de uma  $n$ -variedade digital baseia-se na complexidade e nos homeomorfismos de uma coleção de  $n$ -variedades comprimidas, digamos  $M_1, M_2, \dots$ , de alguma  $n$ -variedade  $M$  e que  $M_1, M_2, \dots$ , são todas homeomorfas umas as outras. Isto é, através de  $R$ -transformações ou de compressões passamos de uma a outra e sabemos que isso significa efetuar transformações contráteis.

### 7.1 Complexidade de uma $n$ -variedade digital

**Definição 7.1.1.** (EVAKO, 2015) *Sejam  $M$  uma  $n$ -variedade digital com número de vértices  $|M|$  e  $CM$  sua compressão com número de vértices  $|CM|$ . A **complexidade** de  $M$ , denotada por  $com(M)$  é  $|CM|$ .*

**Proposição 7.1.2.** (EVAKO, 2015) *Sejam  $M$  uma  $n$ -variedade e  $|M|$  o número de vértices de  $M$ . Então:*

- Se  $n = 1$ , então  $com(M) = 4$ .
- Se  $n > 1$ , então  $2n + 2 \leq com(M) \leq |M|$ .

*Demonstração.* Se  $n = 1$  temos que para todo  $v \in M$ ,  $O(v)$  é uma  $S^0$ . A única 1-variedade que temos é a 1-esfera digital. Logo  $M$  é uma 1-esfera digital cuja compressão, a  $S_{min}^1$ , possui 4 vértices.

Se  $n > 1$ , temos que uma  $S_{min}^n$  é a junção de  $n + 1$  cópias de  $S^0$ , totalizando  $2n + 2$  vértices (cada  $S^0$  possui 2 vértices) e essa é mais simples  $n$ -variedade digital. Também sabemos que a compressão de uma  $n$ -variedade digital reduz a quantidade de seus vértices, pois contraímos os seus  $n$ -discos, isto é  $|CM| \leq |M|$ . E assim temos que  $2n + 2 \leq com(M) \leq |M|$  □

### 7.2 Algoritmo para classificação das $n$ -variedades digitais

Segundo (LEE, 2010), um dos mais importantes problemas topológicos é a busca por uma classificação de variedades. O ideal seria obter para cada dimensão  $n$ , uma lista das  $n$ -variedades, e um teorema que diga se uma dada  $n$ -variedade é homeomorfa a exatamente uma das que constam na lista. O teorema seria ainda melhor se ele viesse com uma lista de invariantes topológicos computáveis que pudesse ser utilizado para decidir onde a variedade figuraria na lista.

Com isso em mente, seguimos para o algoritmo para classificação das  $n$ -variedades digitais, (EVAKO, 2015):

- Dados  $n$  e  $A$ ,  $2n + 2 \leq A$ , obtenha todas as  $n$ -variedades comprimidas com  $s$  pontos,  $2n + 2 \leq s \leq A$ . Denote por  $B(n, A)$  o conjunto destas  $n$ -variedades. Note que  $B(n, A)$  possui um número finito de elementos.
- Seja  $M$  uma  $n$ -variedade com número de vértices  $|M| = A + 1$ . Converta  $M$  na sua compressão  $CM$ . Se  $M = CM$ , então  $CM \notin B(n, A)$ , logo  $M \in B(n, A + 1)$ . Se  $|CM| < |M|$ , então  $M$  é homeomorfa a  $CM$  e  $CM \in B(n, A)$ .

Para melhor entender o funcionamento do algoritmo, descrevemos e comentamos cada um dos passos que devem ser seguidos. Utilizaremos  $n = 2$  e  $A = 10$ .

1. **Sejam  $n$  e  $A$ , dois números conhecidos, de modo que a desigualdade a seguir seja satisfeita  $2n + 2 \leq A$ . Obtenha todas as  $n$ -variedades na sua versão comprimida com quantidade de vértices  $s$ , com  $2n + 2 \leq A$ .**

Temos que  $2 \cdot 2 + 2 = 6 \leq 10$ , logo desigualdade inicial,  $2n + 2 \leq A$ , é satisfeita. Devemos obter todas as 2-variedades tais que o número de vértices em cada uma delas seja 6, 7, 8, 9 ou 10.

Mais ainda, essas  $n$ -variedades que encontrarmos devem estar na sua versão comprimida, isto é, se encontramos uma 2-variedade com 9 vértices, devemos checar se ela está em sua versão comprimida: em caso afirmativo, nada fazemos; do contrário não fazemos sua compressão. Com isso, temos “catalogado” todas as 2-variedades com número de vértices  $s$ ,  $6 \leq s \leq 10$ .

2. **Denote por  $B(n, A)$  o conjunto destas  $n$ -variedades. Note que  $B(n, A)$  possui um número finito de elementos.**

No nosso exemplo, o conjunto será chamado  $B(2, 10)$ , nele teremos todas as variedades comprimidas com número de vértices  $s$ ,  $6 \leq s \leq 10$ .

Digamos que conseguimos encontrar uma quantidade  $k$  de 2-variedades nessas condições. Ou seja, temos o conjunto  $B(2, 10) = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_k\}$ , cada  $M_i$ , com  $i = 1, \dots, k$ , é uma 2-variedade comprimida. Entender como formar o conjunto  $B(n, A)$  é fundamental para compreender o algoritmo.

3. **Seja  $M$  uma  $n$ -variedade com número de vértices  $|M| = A + 1$ .**

Para o nosso exemplo, seria uma  $M$  variedade de modo que o número de vértices de  $M$ ,  $|M|$ , seja igual a  $10 + 1 = 11$ .

4. **Converta  $M$  na sua compressão, que é denotada por  $CM$ .**

Apenas duas coisas podem acontecer quando transformamos uma variedade  $M$  em sua forma comprimida  $CM$ : Ou ela já está na sua versão comprimida e de fato a compressão não é feita, ou nós a comprimimos e o número de vértices de  $CM$  (a versão comprimida de  $M$ ) é menor do que  $A + 1$ . No nosso exemplo, seria menor do que 11.

5. **Se  $M = CM$ , então  $CM \notin B(n, A)$ , logo  $M \in B(n, A + 1)$ . Se  $|CM| < |M|$ , então  $M$  é homeomorfa a  $CM$  e  $CM \in B(n, A)$ .**

Se  $M = CM$ , então  $CM \notin B(n, A)$ . Isso é óbvio pois, se o número de vértices de  $M$  não se altera na compressão quer dizer que esse número permanece sendo  $A + 1$  e só pertencem ao conjunto  $B(n, A)$ , as  $n$ -variedades com no máximo  $A$  vértices (não esqueça que  $M$  tem  $A + 1$  vértices), isso significa que todas as  $n$ -variedades comprimidas com no máximo  $A$  vértices estavam no conjunto  $B(n, A)$ .

Se  $|CM| < |M|$ , quer dizer que  $CM$  tem número de vértices menor que  $A + 1$  (recorde que a compressão diminui o número de vértices), logo existe no conjunto  $B(n, A)$  alguma variedade que é “a mesma” que  $CM$ , e portanto  $CM \in B(n, A)$ , isso significa que realmente todas as  $n$ -variedades comprimidas com no máximo  $A$  vértices estavam no conjunto  $B(n, A)$ .

Note que seja como for o resultado de comprimir essa variedade  $M$  que aparece no item 4 e possui  $A + 1$  vértices, o conjunto  $B(n, A)$  já possuía todas as  $n$ -variedades comprimidas com no máximo  $A$  vértices. E é esse fato que faz o algoritmo verdadeiramente classificar as  $n$ -variedades.



## 8 Conclusões

Tivemos como objetivo estudar e aprofundar os conceitos da Topologia Digital de Evako, apontando como se relacionam os conceitos de Topologia dos espaços contínuos com os espaços digitais. Com isso esperamos tornar o tema mais acessível, a partir da elaboração de um texto rico em detalhes, exemplos e explicações. Também nos motivou investigar quais as vantagens e desvantagens, em utilizar a Topologia Digital.

Para o caso contínuo, o problema de classificar as  $n$ -variedades é bem mais complicado. Já era conhecido por Poincaré que a 3-esfera é simplesmente conexa, uma propriedade que a distingue de todos os outros exemplos de 3-variedades compactas conhecidas em seu tempo. Poincaré perguntou se era possível encontrar uma 3-variedade compacta que é simplesmente conexa e que não seja homeomorfa à 3-esfera. Ninguém encontrou uma, e a conjectura de que toda 3-variedade compacta simplesmente conexa é homeomorfa a 3-esfera ficou conhecida como a conjectura de Poincaré. Conjecturas análogas foram feitas e provadas em dimensões mais elevadas, para 5-variedades e superiores por Stephen Smale, em 1961 e para 4-variedades por Michael Freedman, em 1982. Em 2003, o matemático russo Grigori Perelman, completou a prova da conjectura da geometrização que implica a conjectura de Poincaré. Para dimensão 4 e maiores, não há esperança para uma classificação completa. Em 1958, A. A. Markov provou que não existe algoritmo para classificar variedades de dimensão superior a 3. Em particular, a topologia de 4-variedades é atualmente um campo altamente ativo de investigação, (LEE, 2010).

Retomando o que dissemos no início do texto: Um espaço molecular pode ser entendido como análogo discreto de uma  $n$ -variedade no espaço euclidiano, mais ainda esse espaço molecular sempre pode ser representado por um grafo de interseção. Para tais grafos, ou ainda espaços digitais, temos condições de verificar se eles são  $n$ -variedades digitais e temos em mãos um algoritmo que os classifica.

Sabemos que não existe algoritmo que classifique as  $n$ -variedades para  $n > 3$ , mas há grande movimentação para a classificação das 3-variedades. Sabendo disso, nos colocamos a refletir: Como a Topologia Digital de Evako poderia contribuir para resolução de tal problema?

A resposta é um tanto simples, basta que tenhamos os análogos discretos (espaços moleculares) das 3-variedades, e então utilizamos os respectivos grafos de interseção no algoritmo da classificação. A dificuldade reside justamente em obter os espaços moleculares corretos, (EVAKO, 2015).

Indicamos como principal vantagem na utilização dessa abordagem à discretização é que temos sanado o problema de classificação das  $n$ -variedades. Ressaltamos ainda que

em diversos cursos de Graduação não existe a disciplina Topologia<sup>1</sup> e por conta do estudo de Teoria dos Grafos não exigir qualquer pré-requisito e ser bastante visual, a Topologia Digital pode ser um caminho para introduzir os conceitos básicos aqui apresentados (variedades, homotopia, invariante, etc), inclusive podendo contemplar alunos de outros cursos de graduação, como Ciência da Computação, ou ainda professores do Ensino Médio que fazem Mestrado Profissional (PROFMAT) e alunos do ensino médio.

---

<sup>1</sup> Particularmente minha graduação foi em Licenciatura em Matemática na UFRPE, e me lembro de ouvir “Topologia da Reta”, nada muito além disso.

## 8.1 Software GraphManifold

Dada a necessidade de manipular os grafos, foi possível desenvolver um *software*, o *GraphManifold*. Tivemos como objetivo criar uma ferramenta que ajudasse na compreensão, investigação e visualização das principais definições e resultados apresentados no texto.

### 1. Definição da Operação Soma entre dois grafos, Definição 3.1.2.

```

size = 0
def sumGraph(Graph1, Graph2, display):
    global size
    size = len(Graph1.nodes()) - 1
    graph = Graph1.copy()
    Graph2 = renameNodes(Graph2)
    graph.add_edges_from(Graph2.edges())
    for i in Graph1.nodes_iter(data = False):
        for j in Graph2.nodes_iter(data = False):
            graph.add_edge(i, j)

    blue = Graph1.nodes()
    yellow = Graph2.nodes()
    if (display == True):
        print ("ok")
        get_sum(graph, blue, yellow)
        plt.waitforbuttonpress()
        plt.close()

    size = 0
    return graph

def get_sum(graph, blue, yellow):
    pylab.ion()
    pylab.show()

    position = nx.spring_layout(graph)
    nx.draw(graph, position, nodelist=blue, node_color="b")
    nx.draw(graph, position, nodelist=yellow, node_color="y")
    plt.get_current_fig_manager().canvas.manager.window.attributes('-topmost', 1)

```

A função `sumGraph` recebe os dois grafos a serem somados, copia o primeiro, renomeia os vértices (`nodes`) do segundo. Então é realizada a adição das arestas entre `Graph1` e `Graph2`, da mesma maneira que é solicitado pela definição: sempre que tivermos dois vértices um deles pertencentes à `Graph1` e o outro à `Graph2` uma aresta é acrescentada ao novo grafo que contém além destas novas arestas, cópias dos dois grafos envolvidos na operação.

Já a função `get_sum` exibe o grafo resultante de `sumGraph` (`graph` é justamente a entrada de `get_sum`), nas cores azul e amarelo.

## 2. Definições de vizinhança e bola de um vértice, Definição 3.2.1.

```
def get_rim(graph, vertice, display):
    ov = nx.subgraph(graph, graph.neighbors(vertice))
    if(display):
        GUI.display_graph(ov)
    return ov

def get_ball(graph, vertice, display):
    ov = graph.neighbors(vertice)
    ov.append(vertice)
    ball = nx.subgraph(graph, ov)
    if(display):
        GUI.display_graph(ball)
    return ball
```

Figura 66: Definições de vizinhança e bola de um vértice.

A função `get_rim` recebe o grafo e um de seus vértices e nos informa todos os vértices do grafo que são adjacentes a ele. Já a função `get_ball` informa o subgrafo induzido pelo próprio vértice juntamente com seus vizinhos.

## 3. Checar se um grafo é contrátil, Definição 3.2.3.

```
def check_contractible(graph, display):
    global path
    path = []
    isContractible_(graph)
    if(display== True):
        display = Display.Display()
        display.display_graph_(graph, path)

def isContractible_(graph):
    global path
    if(len(graph.nodes())==1):
        print "Graph is contractible"
        return True
    else:
        for i in graph.nodes_iter(data=False):
            ov = graph.subgraph(graph.neighbors(i))
            path.append([[i],ov])
            if(len(ov.nodes())>0 and nx.is_connected(ov)):
                if(isContractible_(ov)==True):
                    return True
        return False
```

Figura 67: Checar se um grafo é contrátil.

A função `isContractible_` recebe o grafo a ser checado investigando primeiramente se ele é o grafo trivial (há apenas um vértice), se isso for verdade a investigação acaba e temos concluído que `Graph is contractible`. Caso exista mais de um vértice no grafo a ser investigado, um deles é escolhido e a vizinhança é checada:

Se for desconexa o vértice não pode ser simples, devemos procurar outro vértice para investigação; Se for um único vértice ele é simples e pode ser deletado. Voltamos a repetir o procedimento para outro vértice no grafo obtido após a deleção; Se for conexa o processo deve ser repetido para o subgrafo obtido até chegar a alguma das conclusões anteriores.

Conforme exigido pela Definição 3.2.3, só podemos concluir que um grafo dado é contrátil se for possível obter uma sequência de vértices simples, cuja deleção sequencial nos forneça o grafo trivial.

4. Checar se um grafo é uma  $n$ -esfera digital, Definição 5.1.2.

```
def check_sphere_(graph, display):
    global path_sphere
    global path_ov
    path_sphere = []
    path_ov = []
    is_Sphere_(graph)

    if (display == True):
        display = Display.Display()
        display.display_sphere(graph, path_sphere)

def is_Sphere_(graph):
    global path_sphere
    global path_ov

    if (len(graph.nodes()) > 2 and nx.is_connected(graph) == False):
        path_sphere.append(path_ov)
        path_ov = []
        return False
    elif (len(graph.nodes()) == 2 and nx.is_connected(graph) == False):
        path_sphere.append(path_ov)
        path_ov = []
        print "Graph is Sphere"
        return True
    else:
        for node in graph.nodes_iter(data=False):
            ov = nx.subgraph(graph, graph.neighbors(node))
            disc = get_disc(graph, node, False)
            path_ov.append([node, ov])
            if (isContractible_(disc) == False or is_Sphere_(ov) == False):
                path_sphere.append(path_ov)
                path_ov = []
                print "Graph is not Sphere"
                return False
```

Figura 68: Checar se um grafo é uma  $n$ -esfera digital.

O ponto de partida é a Definição 5.1.1, que nos diz que ma 0-esfera digital é um grafo desconexo com apenas dois vértices. A função `is_Sphere_` recebe o grafo a ser checado investigando o “caminho das vizinhanças” para cada vértice. Detalhadamente, dado um vértice se sua vizinhança já for uma  $S^0$ , o próximo passo é verificar se o grafo menos tal vértice é contrátil. Caso a vizinhança não seja uma  $S^0$ , ela será considerada um grafo no qual a mesma investigação será realizada. E assim por diante.

O último passo de cada investigação de vizinhança é:

Se a vizinhança possui mais de 2 vértices e é desconexo, não pode ser uma  $n$ -esfera;

Se a vizinhança possui exatamente 2 vértices e é desconexo, é uma esfera. Exibindo `GraphisSphere`.

5. Construção de uma  $n$ -esfera digital minimal, Definição 5.1.4.

```

def genNSphere(n, display):
    count = 0
    if n == 0:
        G = nx.Graph()
        G.add_nodes_from([0,1])
        return G
    elif n == 1:
        G = nx.Graph()
        G.add_nodes_from([0,1])
        H = nx.Graph()
        H.add_nodes_from([0,1])
        I = sumGraph(G,H,display)
        return I
    else:
        G = nx.Graph()
        G.add_nodes_from([0,1])
        H = nx.Graph()
        H.add_nodes_from([0,1])
        I = sumGraph(G,H,display)
        count = count + 1
        while (count < n):
            I = sumGraph(I,G,display)
            count = count + 1
        return I

```

Figura 69: Construção de uma  $n$ -esfera digital minimal.

A função `genNSphere` recebe o valor de  $n$ , recorde que somamos  $n + 1$  cópias de  $S^0$ .  
Segue que,

Se  $n = 0$  temos apenas uma  $S^0$ , logo não há o que somar;

Se  $n = 1$ , somamos duas cópias de  $S^0$  e temos a  $S_{min}^1$ ;

Para os demais casos, utilizamos o passo anterior como passo base e fazemos a operação somar uma  $S^0$  até a quantidade  $n$  ser atingida. Note que desse modo teremos realizado a soma de  $n + 1$  cópias de  $S^0$ .

## 6. Definição do disco digital, sua fronteira e seu interior, Definição 5.1.2.

```

def get_disc(graph, vertice, display):

    disc = graph.nodes()
    disc.remove(vertice)

    disc = nx.subgraph(graph, disc)
    if(display):
        GUI.display_graph(disc)
    return disc

def get_front (graph,vertice,display):
    D = get_disc(graph, vertice, False)
    I = get_int(graph,vertice, False)
    F= []
    for i in D.nodes():
        if i not in I.nodes():
            F.append(i)
    front = nx.subgraph(graph, F)
    return front

def get_int(graph,vertice, display):
    disc = get_disc(graph, vertice, False)
    ov = get_rim(graph,vertice,False)

    for i in ov:
        if i in disc:
            disc.remove_node(i)

    interior = disc
    if (display):
        GUI.display_graph(interior)
    return interior

```

Figura 70: Definição do disco digital, sua fronteira e seu interior.

Pela própria definição, só faz sentido obter discos digitais de espaços digitais (grafos) que já sabemos se tratar de uma  $n$ -esfera digital. Realizada essa etapa, o disco digital nada mais é do que o espaço original, retirado um vértice.

O interior do disco,  $IntD$ , é obtido quando retiramos do disco digital todos outros vértices que pertencem à vizinhança do vértice que originalmente determinou o disco.

A fronteira do disco,  $\partial D$ , consiste de todos os vértices que estão no disco mas não são interiores. Ou seja, são todos os vizinhos do vértice que determinou o disco.

## 8.2 Trabalhos Futuros

Uma característica importante da ciência moderna é que dados de vários tipos estão sendo produzidos a uma taxa sem precedentes. Isto é proporcionado devido aos novos métodos experimentais e também pelo aumento na disponibilidade da tecnologia de alta potência para gerá-los. Nessa perspectiva, se faz necessário utilizar e criar novos métodos para a análise dos dados, mais ainda, métodos que possam lidar com os problemas da alta dimensão e da quantidade dos dados, assim como a velocidade com que são obtidos e/ou produzidos, além de seus diferentes tipos e formatos (SNÁŠEL et al., 2016), (CARLSSON, 2009). Tais dados são chamados Big Data e possuem como características: volume, velocidade, variedade, veracidade e valor. Volume refere-se ao tamanho dos dados para processamento e análise. Velocidade relaciona-se com a taxa de crescimento e uso desses dados. Variedade significa os diferentes tipos e formatos utilizados para processamento e análise. Veracidade diz respeito à precisão dos resultados e análise dos dados. Valor, o que é acrescentado e a contribuição oferecida pelo processamento e análise de dados (SNÁŠEL et al., 2016), (CHEN; CHIANG; STOREY, 2012).

Geometria e Topologia são ferramentas naturais, em certo sentido, para esse tipo de análise, pois é possível considerar a geometria como o estudo das funções de distância e a topologia como o estudo da forma, no sentido que as propriedades dos objetos geométricos não dependem das coordenadas escolhidas. Essa insensibilidade à métrica é útil no estudo de situações em que a métrica é entendida apenas de forma grosseira. Por exemplo, no contexto biológico, noções de distância são construídas usando algumas medidas intuitivamente atraentes de similaridade, como o algoritmo BLAST (*Basic Local Alignment Search Tool*) ou seus similares, que permite que o investigador compare uma sequência de consulta com uma biblioteca (ou banco de dados de sequências), e identifique as sequências da biblioteca que se assemelham à sequência de consulta, considerando um determinado limiar (CARLSSON, 2009).

Um problema com a análise de Big Data, é que os métodos atualmente usados com base na criação de um modelo, simulação e então avaliação, não pode ser aplicado. O processo descrito é útil e adequado para resolver os problemas clássicos, como os problemas físicos, porque a base teórica destes problemas tem sido pesquisada e compreendida o suficiente de modo que pode ser reconstruída para ajustar o modelo criado. Para o processamento de Big Data o primeiro problema é definir uma hipótese concreta das características dos dados que podem ser testadas. Assim, o principal objetivo da pesquisa não seria definir um modelo, mas ser capaz de obter características interessantes do conjunto de dados. É nesse sentido que se justifica utilizar a topologia como ferramenta que possibilite uma visão geral da organização dos dados e aponte para regiões de interesse, uma vez que os dados podem estar baseados em formas que não são fáceis de capturar utilizando métodos tradicionais. São exemplos bem sucedidos dessa análise inspirada na

forma dos dados: Detecção de fragmentação em redes implícitas dos partidos Republicano e Democrata na Câmara dos Representantes dos EUA, a análise foi baseada no comportamento de votos de 1990 a 2011; também foi possível a identificação de mais estilos de jogo para jogadores de *basketball* do que os cinco tradicionais (armador, ala-armador, ala, ala-pivô, e pivô), para isso foi utilizado um conjunto de dados que codifica vários aspectos de desempenho entre os jogadores da *National Basketball Association*, a NBA (LUM et al., 2013).

O que se pretende com a Análise Topológica de Dados (*Topological Data Analysis*) é criar um resumo ou uma representação comprimida de todas as características dos dados para rapidamente ajudar a desvendar padrões e relacionamentos do conjunto dados. O formalismo matemático, que foi desenvolvido para a incorporação de técnicas geométricas e topológicas (CARLSSON, 2009), lida com nuvens de pontos, ou seja, conjuntos finitos de pontos. Então, são adaptadas ferramentas dos vários ramos da geometria e da topologia para o estudo destes conjuntos que são amostras finitas, tomadas a partir de um objeto geométrico, talvez com ruído. A topologia fornece uma linguagem formal para a matemática qualitativa, onde as relações de proximidade (ou vizinhança) são estudadas, sem o uso de distâncias. A ideia de construção de resumos das características dos dados envolve a compreensão da relação entre objetos topológicos e geométricos, (SNÁŠEL et al., 2016). Em particular, o método chamado **Mapper**, (SINGH; MÉMOLI; CARLSSON, 2007), tem sido utilizado para permitir tal análise, ele é baseado na ideia de agrupamento dos dados por um conjunto de funções chamadas filtros, definidas em cada ponto dos dados, e então é realizada uma extração de descrições do conjunto de dados, sob a forma de complexos simpliciais.

Para a Tese de Doutorado, temos como objetivo geral propor um novo método/modelo puramente discreto e combinatório, utilizando Teoria dos Grafos, para a realização da Análise Topológica de Dados. E como objetivos específicos:

1. Contribuir com a popularização e utilização da Análise Topológica de Dados.
2. À medida que avançarmos na construção do método, participar de eventos na área, para discutir com outros especialistas os resultados que obtivermos, assim como sua aplicação e viabilidade de abordar novos problemas.
3. Propor um novo método para análise de dados, em particular contribuir para estudos da Morfometria Geométrica de espécies de peixes e/ou na classificação de otólitos.
4. Validar o método proposto, utilizando dados já analisados por outros métodos (Análise de Agrupamento) e comparando os resultados obtidos.
5. Elencar problemas que podem ser resolvidos satisfatoriamente através do Método proposto, incluindo a reflexão das vantagens nesta abordagem.

---

Com isso, esperamos que a teoria proposta seja robusta e que faça a conexão direta entre Teoria dos Grafos e Análise Topológica de Dados, que o novo método qualitativo seja capaz de contribuir para o tratamento de problemas envolvendo Big Data e dada a sintonia na construção do modelo com a natureza discreta dos dados, esperamos reter toda informação destes, promovendo assim uma análise mais precisa da forma como os dados se organizam.



## Referências

- BONDY, J.; MURTY, U. *Graph theory (graduate texts in mathematics)*. [S.l.]: Springer New York, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 24, 25, 26, 28 e 29.
- CARLSSON, G. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 46, n. 2, p. 255–308, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- CHEN, H.; CHIANG, R. H.; STOREY, V. C. Business intelligence and analytics: From big data to big impact. *MIS quarterly*, v. 36, n. 4, p. 1165–1188, 2012. Citado na página 89.
- CHEN, L.; RONG, Y. Digital topological method for computing genus and the betti numbers. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 157, n. 12, p. 1931–1936, 2010. Citado na página 21.
- ECKHARDT, U.; LATECKI, L. J. Topologies for the digital spaces  $\mathbb{Z}^2$  and  $\mathbb{Z}^3$ . *Computer Vision and Image Understanding*, Elsevier, v. 90, n. 3, p. 295–312, 2003. Citado na página 21.
- EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. *Computational topology: an introduction*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. Citado na página 30.
- EVAKO, A. V. Topological properties of the intersection graph of covers of n-dimensional surfaces. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 147, n. 1, p. 107–120, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- EVAKO, A. V. Topology preserving discretization schemes for digital image segmentation and digital models of the plane. *Open Access Library Journal*, v. 1, p. e566, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 59, 60 e 61.
- EVAKO, A. V. Classification of digital n-manifolds. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 181, p. 289–296, 2015. Citado 18 vezes nas páginas 35, 36, 40, 46, 47, 50, 63, 64, 65, 66, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78 e 81.
- HATCHER, A. *Algebraic topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- IVASHCHENKO, A. V. Representation of smooth surfaces by graphs. transformations of graphs which do not change the euler characteristic of graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 122, n. 1-3, p. 219–233, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 51.
- IVASHCHENKO, A. V. Some properties of contractible transformations on graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 139–145, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 45, 47, 48 e 49.
- KNILL, O. The theorems of green-stokes, gauss-bonnet and poincare-hopf in graph theory. *arXiv preprint arXiv:1201.6049*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 50.
- LEE, J. *Introduction to topological manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 33, 70, 77 e 81.

LOVASZ, L.; PELIKAN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática discreta*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

LUM, P. et al. Extracting insights from the shape of complex data using topology. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 3, 2013. Citado na página 90.

SINGH, G.; MÉMOLI, F.; CARLSSON, G. E. Topological methods for the analysis of high dimensional data sets and 3d object recognition. In: *SPBG*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 91–100. Citado na página 90.

SMYTH, M. B.; WEBSTER, J. Discrete spatial models. In: *Handbook of spatial logics*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 713–798. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 39.

SNÁŠEL, V. et al. Geometrical and topological approaches to big data. *Future Generation Computer Systems*, Elsevier, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.