KLEBER NAPOLEÃO NUNES DE OLIVEIRA BARROS

ABORDAGEM CLÁSSICA E BAYESIANA EM MODELOS SIMÉTRICOS TRANSFORMADOS APLICADOS À ESTIMATIVA DE CRESCIMENTO EM ALTURA DE *Eucalyptus urophylla* NO POLO GESSEIRO DO ARARIPE - PE

RECIFE
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

ABORDAGEM CLÁSSICA E BAYESIANA EM MODELOS SIMÉTRICOS TRANSFORMADOS APLICADOS À ESTIMATIVA DE CRESCIMENTO EM ALTURA DE *Eucalyptus urophylla* NO POLO GESSEIRO DO ARARIPE - PE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional

Orientador: Prof. Dr. José Antônio da Silva Aleixo

Co-orientador: Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro

Co-orientador: Prof. Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira

RECIFE

2010

Ficha catalográfica

B277a Barros, Kleber Napoleão Nunes de Oliveira
Abordagem clássica e Bayesiana em modelos simétricos transformados aplicados à estimativa de crescimento em altura de *Eucalyptus urophylla* no Polo Gesseiro do Araripe-PE / Kleber Napoleão Nunes de O. Barros. – 2010.
84f.:il.

Orientador: José Antônio Aleixo da Silva.
Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2010.
Inclui referências e apêndice.

1.Florestas energéticas 2.Modelo de Chapman-Richards 3.Transformação de dados 4.Algoritmo de Metropolis-Hastings. I.Silva, José Antônio Aleixo da, Orientador II. Título

CDD 574.018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Dissertação sob o título *ABORDAGEM CLÁSSICA E BAYESIANA EM MODELOS SIMÉTRICOS TRANSFORMADOS APLICADOS À ESTIMATIVA DE CRESCIMENTO EM ALTURA DE Eucalyptus urophylla NO POLO GESSEIRO DO ARARIPE - PE*, apresentada por Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros e aprovada em 22 de fevereiro de 2010, em Recife, Estado de Pernambuco, pela banca examinadora constituída por:

Orientador:

Prof. Dr. José Antônio Aleixo da Silva
Departamento de Ciência Florestal - UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo de Paula Mendes
Departamento de Pesca - UFRPE

Prof. Dr. Kleber Régis Santoro
Unidade Acadêmica de Garanhuns - UFRPE

Prof. Dr. Cláudio Tadeu Cristino
Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

Dedico este trabalho a meus avos maternos Severino e Josefa e a minha mãe Maria Célia, pessoas que suportaram meus defeitos e promoveram minhas virtudes.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, quase minha casa durante o mestrado, onde pude conviver com professores admiráveis como o Dr. Borko D. Stosic, Dr. Kleber R. Santoro, Dr. Cláudio T. Cristino, Dr. Eufrázio S. Santos, Dra. Viviane M. Oliveira, Dr. Paulo de Paula Mendes, entre outros igualmente especiais, dos quais aprendi a respeitar desde os primeiros contatos. Também agradeço aos funcionários Marcos e Zuleide pela seu competência e amizade. Reconhecido também, a estrutura física e o ambiente intelectual propício para estudos científicos diversos, que a Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) oferece, o qual pude desfrutar durante os dois anos em que transcorreu a minha pós-graduação.

Sou grato ao meu ótimo orientador prof. Dr. José Antônio da Silva Aleixo, por suas aulas preciosas, nas quais pudemos debater bastante, ampliando meus horizontes no que se refere ao planejamento experimental e à amostragem. Não poderia deixar de lhe agradecer, de forma alguma, suas correções que tornaram possíveis transformar informações desordenadas em um trabalho científico.

Outro, não menos admirável, professor, que embora não faça mais parte do Programa, deixa profunda marca na minha concepção da estatística, com suas aulas inspiradores é o Phd. Gauss Cordeiro. Agradeço-lhe ainda, na qualidade de co-orientador deste trabalho, por suas correções e suas valiosas sugestões que contribuíram no formato final deste trabalho.

Agradeço ao professor Dr. Rinaldo Ferreira pelas correções e co-orientação.

Agradeço à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo apoio financeiro ao longo destes 1 ano e 6 meses, sem o qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

À todos os estudantes de mestrado e doutorado em Biometria e Estatística Aplicada, com os quais convivi ao longo destes 2 anos, pela cumplicidade e respeito, nas boas e más horas.

Agradeço aos poucos familiares, dentre muitos, com os quais tive contato efetivo e afetivo, e que sempre se orgulharam e incentivaram o meu crescimento.

Sou grato, a minha esposa Patrícia que soube ter paciência em diversas horas complicadas e sempre me incentivou a concluir o texto.

Por último, mas não menos importante, ao meu filho Khalel, que agora com 6 meses, soube me acordar durante a noite, com seu choro, para que eu pudesse continuar a escrever.

"Tudo é número!"

Pitágoras

Resumo

É abordado neste trabalho o modelo de crescimento não linear de Chapman-Richards com distribuição dos erros seguindo a nova classe de modelos simétricos transformados e inferência Bayesiana para os parâmetros. O objetivo foi aplicar essa estrutura, via algoritmo de Metropolis-Hastings, afim de selecionar a equação que melhor estimasse as alturas de clones de *Eucalyptus urophilla* provenientes de experimento implantado no Instituto Agronômico de Pernambuco (IPA), na cidade de Araripina. O Polo Gesseiro do Araripe é uma zona industrial, situada no alto sertão pernambucano, que consume grande quantidade de lenha proveniente da vegetação nativa (caatinga) para calcinação da gipsita. Nesse cenário, há grande necessidade de uma solução, econômica e ambientalmente, viável que possibilite uma minimização da pressão sobre a flora nativa. O gênero *Eucalyptus* se apresenta como alternativa, pelo seu rápido desenvolvimento e versatilidade. A altura tem se revelado fator importante na prognose de produtividade e seleção de clones melhores adaptados. Uma das principais curvas de crescimento, é o modelo de Chapman-Richards com distribuição normal para os erros. No entanto, algumas alternativas tem sido propostas afim de reduzir a influência de observações atípicas geradas por este modelo. Os dados foram retirados de uma plantação, com 72 meses. Foram realizadas as inferências e diagnósticos para modelo transformado e não transformado com diversas distribuições simétricas. Após a seleção da melhor equação, foram mostrados alguns gráficos da convergência dos parâmetros e outros que comprovam o ajuste aos dados do modelo simétrico transformado t de Student com 5 graus de liberdade utilizando inferência Bayesiana nos parâmetros.

Palavras-chave: *Florestas Energéticas*, Modelo de Chapman-Richards, Transformação de dados, Algoritmo de Metropolis-Hastings.

Abstract

It is presented in this work the growth model nonlinear Chapman-Richards with distribution of errors following the new class of symmetric models processed and Bayesian inference for the parameters. The objective was to apply this structure, via Metropolis-Hastings algorithm, in order to select the equation that best predicted heights of clones of Eucalyptus urophilla experiment established at the Agronomic Institute of Pernambuco (IPA) in the city of Araripina . The Gypsum Pole of Araripe is an industrial zone, located on the upper interior of Pernambuco, which consumes large amount of wood from native vegetation (caatinga) for calcination of gypsum. In this scenario, there is great need for a solution, economically and environmentally feasible that allows minimizing the pressure on native vegetation. The generus *Eucalyptus* presents itself as an alternative for rapid development and versatility. The height has proven to be an important factor in prognosis of productivity and selection of clones best adapted. One of the main growth curves, is the Chapman-Richards model with normal distribution for errors. However, some alternatives have been proposed in order to reduce the influence of atypical observations generated by this model. The data were taken from a plantation, with 72 months. Were performed inferences and diagnostics for processed and unprocessed model with many distributions symmetric. After selecting the best equation, was shown some convergence of graphics and other parameters that show the fit to the data model transformed symmetric Student's t with 5 degrees of freedom in the parameters using Bayesian inference.

Keywords: *Energetic forests*, Chapman-Richards model, Data transformation, Metropolis-Hastings algoritm.

Lista de Figuras

1 Localização do Pólo Gesseiro do Araripe. Fonte: GADELHA, 2010. . . . . p. 19

2 Toras de *Eucalyptus* secas e empilhadas retiradas de manejo florestal na Chapada do Araripe. . . . . p. 20

3 Gráficos de funções densidade e distribuições acumuladas Cauchy e normal p. 30

4 Gráficos de funções densidade exponencial dupla e normal . . . . . p. 31

5 Gráficos de funções densidade logística I e normal . . . . . p. 33

6 Gráficos de funções densidade logística II e normal . . . . . p. 34

7 Gráficos de funções densidade t de Student e normal . . . . . p. 35

8 Gráficos das funções densidade normal, Cauchy, Laplace, logística I e II e t de Student padronizadas ($\nu = 1$). . . . . p. 36

9 Gráficos do coeficiente de curtose em função dos graus de liberdade para as distribuições normal, Laplace, logística I e II e t de Student ($\nu = 1$). . . p. 37

10 Distribuição hipotética de um parâmetro θ . . . . . p. 42

11 Aspecto paisagístico da chapada do Araripe . . . . . p. 50

12 Vistas interna e externa do experimento. . . . . p. 51

13 Planta baixa da parcela e área útil. . . . . p. 51

14 Box-plot dos dados. . . . . p. 54

15 Log-verossimilhança perfilada para o modelo simétrico t de Student. . . . p. 56

16 Log-verossimilhança perfilada para o modelo simétrico transformado t de Student. . . . . p. 58

17 Histogramas das densidades a posteriori do modelo (2.2). . . . . p. 63

18 Séries temporais dos valores de α, κ, θ, λ e τ. . . . . p. 64

19 Autocorrelogramas dos parâmetros. . . . . p. 65

20 Resíduos de Geweke. . . . . p. 66

21 Gráfico dos resíduos de Pearson *versus* índices. . . . . p. 68

22 Gráfico dos dados originais *versus* retransformados. . . . . p. 69

23 Ajuste das estimativas Bayesianas aos dados transformados. . . . . p. 71

24 Ajuste das estimativas Bayesianas aos dados após retransformação. . . . p. 72

Lista de Tabelas

1 Usos da gipsita e derivados. . . . . p. 18

2 Alguns modelos de crescimento usados em Ciências Florestais. . . . . p. 22

3 Valores das variâncias e do coeficiente de curtose para algumas distribuições simétricas. . . . . p. 37

4 Estatísticas descritivas das alturas dos *Eucalyptus*. . . . . p. 55

5 Estimativas clássicas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas. . . . . p. 57

6 Estimativas clássicas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas e transformação de Box-Cox. . . . . p. 59

7 Estimativas Bayesianas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas sem uso de transformação. . . . . p. 60

8 Estimativas Bayesianas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas sem uso de transformação. . . . . p. 61

9 Comparação das estatísticas de seleção das equações e erros dos ajustes. p. 62

10 Matriz de correlação entre os parâmetros. . . . . p. 67

11 Diagnósticos de Bayesianos. . . . . p. 67

Sumário

1 Introdução p. 14

2 Revisão de Literatura p. 17

2.1 Polo Gesseiro do Araripe . . . . . p. 17

2.2 Eucaliptos como Fonte de Energia Alternativa . . . . . p. 19

2.3 Modelo Estatístico . . . . . p. 20

2.4 Modelos de Crescimento . . . . . p. 21

2.5 Modelos de Chapmam-Richards . . . . . p. 23

2.6 Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . . p. 23

2.7 Métodos Iterativos em Otimização . . . . . p. 26

2.7.1 Algoritmo de Newton-Raphson . . . . . p. 26

2.7.2 Algoritmo Escore de Fisher . . . . . p. 27

2.8 Principais Distribuições Simétricas . . . . . p. 27

2.8.1 Distribuição Normal . . . . . p. 28

2.8.2 Distribuição de Cauchy . . . . . p. 29

2.8.3 Distribuição de Laplace . . . . . p. 30

2.8.4 Distribuição Logística tipo I . . . . . p. 31

2.8.5 Distribuição Logística tipo II . . . . . p. 32

2.8.6 Distribuição t de Student . . . . . p. 34

2.8.7 Estatísticas de Algumas Distribuições Simétricas . . . . . p. 36

2.9 Modelos Simétricos Transformados . . . . . p. 37

2.10 Inferência em Modelos Simétricos Transformados . . . . . p. 39

2.10.1 Critérios de Seleção de modelos . . . . . p. 40
2.11 Inferência Bayesiana . . . . . p. 41
2.11.1 Simulação de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) . . . . . p. 44
2.11.2 Cadeias de Markov . . . . . p. 45
2.11.3 Algoritmo de Metropolis-Hastings . . . . . p. 46
2.11.4 Diagnósticos Bayesianos . . . . . p. 48

3 Material e Métodos p. 50
3.1 O Experimento . . . . . p. 50
3.2 Modelagem . . . . . p. 52

4 Resultados e Discussão p. 54
4.1 Abordagem Clássica . . . . . p. 54
4.2 Aplicação pelo Algoritmo de Metropolis-Hastings . . . . . p. 59

5 Considerações Finais p. 73

Referências p. 74

APÊNDICE p. 80

1 Introdução

Desde que a humanidade descobriu o uso do fogo, a lenha vem sendo utilizada como uma das principais fontes de energia. Atualmente, no Brasil, esse recurso somado ao carvão vegetal contribui com mais de 12$\%$ da matriz energética nacional.

Na região do Araripe, onde fica localizado o Arranjo Produtivo Local[1] (APL) do Polo Gesseiro do Araripe, a principal atividade econômica da região é a exploração da gipsita para produção de gesso. Essa região é responsável por, aproximadamente, 95$\%$ do gesso produzido no país. Apesar de não possuir as maiores reservas de gipsita do Brasil, pois fica atrás do Pará e da Bahia, a Chapada do Araripe apresenta a grande vantagem de possuir minas facilmente explotáveis e produzir uma gipsita que chega a ser classificada como a melhor do mundo. Por outro lado, essa alta produção de gesso é dependente, principalmente, do uso de lenha extraída da vegetação nativa (Caatinga), em função dos baixos custos quando comparada com outras fontes energéticas.

A indústria do gesso produziu, em 2009, mais de 4 milhões de toneladas, sendo que para se produzir uma tonelada de gesso se usa em torno de $0,5$ metro estéreo de lenha na calcinação da gipsita, isto nas calcinadoras que possuem fornos com bons rendimentos. Em fornos menos eficientes, esse consumo chega a superar 1 metro estéreo[2] de lenha por tonelada de gesso produzida. Desta forma, adicionando outros usos da lenha: cocção de alimentos, padarias, etc, o consumo de lenha na região se aproximou de $2,5$ milhões de metros estéreos, em 2009.

Com o aumento da fiscalização sobre o uso de lenha por parte de órgãos ambientais, as indústrias do gesso devem usar somente lenha certificada, isto é, provenientes de planos de manejo sustentado. Entretanto, a oferta de lenha procedente desses planos de manejo florestal sustentado não passa de 4$\%$ das necessidades da indústria do gesso, gerando a busca de lenha em outras regiões. Como a utilização de outras fontes energéticas é, praticamente, inviável em função de seus preços quando comparadas com a lenha,

[1] conjuntos de unidades econômicos, políticos e sociais, localizados em um território específico, interagindo em uma cadeia produtiva de um bem e seus derivados.

[2] metro cúbico de madeira empilhado desuniformemente (forma de fogueira).

alguma medida para aumentar a oferta de lenha na região tem prioridade.

As florestas de rápido crescimento passam a ter um importante papel na cadeia produtiva local, pois podem suprir a demanda de lenha da indústria do gesso e, consequentemente, atenuar a devastação florestal da região pela oferta de madeira em menor espaço de tempo e maior volume. Dentre as essências florestais que constituem as florestas energéticas, o eucalipto possui destaque especial por seu rápido crescimento e adaptabilidade a diferentes condições climáticas, inclusive em regiões semiáridas.

O gênero *Eucalyptus* possui mais de 700 espécies catalogadas sendo o mais plantado no mundo em forma de floresta energética, com mais de 21 milhões de hectares, sendo atualmente, o Brasil seu maior plantador (21$\%$) e detentor da tecnologia mais avançada em relação a produtividade dessa cultura.

Esse gênero foi introduzido, com fins práticos, no Brasil em 1903 no estado de São Paulo, pelo Agrônomo Navarro de Andrade, principalmente, para a produção de dormentes na Companhia Paulista de estradas de Ferro. Desta forma, o gênero *Eucalyptus* que ocorre em quase todas regiões da terra, nos mais variados tipos de clima, por sua alta produtividade em curto espaço de tempo, torna-se uma opção viável economicamente, além de funcionar como um atenuador do desmatamento da vegetação nativa, pois apresenta a vantagem de oferecer maiores quantidades de madeira em menores áreas em menores espaços de tempo.

Para se atingir o chamado manejo florestal sustentado existe a necessidade de se conhecer o crescimento real do povoamento florestal e nessa fase a modelagem matemática é uma ferramenta imprescindível. Inicialmente, autores da década de 1970, pela dificuldade de processar grandes quantidades de dados com modelos mais sofisticados, por exemplo os não lineares intrinsecamente não lineares, utilizavam artifícios matemáticos para linearizar alguma parte do modelo, tornando o ajuste computacionalmente mais simples. Com o desenvolvimento dos computadores, tais ajustes se tornaram possíveis e os modelos não lineares intrinsecamente não lineares (não linearizáveis) passaram a ser usados frequentemente nas ciências florestais.

Dentre tais modelos aplicados nas estimativas de crescimento florestal, o modelo de Chapmam-Richards que é uma generalização do proposto por Bertallanffy, tem sido aplicado com muito sucesso não só em Ciências Florestais, como também em outras áreas que envolvem fenômenos biológicos. Contudo, o uso de tal modelo se fundamenta na normalidade dos dados, o que nem sempre ocorre, bem como nos requisitos básicos de regressão e homocedasticidade. Box e Cox em parte resolveram esses problemas propondo transformações na variável dependente de modelos, desde que tais distribuições sejam,

aproximadamente, simétricas. Novos métodos têm sido desenvolvidos, recentemente, tais como modelos simétricos transformados utilizando outras distribuições tais como: Cauchy, Exponecial potência, logística tipo I e II, t de Student, entre outras, inclusive a normal.

Outra alternativa são os métodos Bayesianos que se constituem de um conjunto de ferramentas embasados em argumentos de probalísticos, pelos quais, torna-se possível incorporar o conhecimento prévio de um especialista acerca de um determinado experimento ou mesmo associar um certo grau de incerteza aos parâmetros, que neste sentido podem ser denominados quantidades aleatórias. Até a década de 1960, havia grande resistência ao uso desses métodos, pois as soluções propostas via técnicas Bayesianas, frequentemente, esbarravam em problemas de integração múltipla analiticamente e numericamente, até então insolúveis. Esse cenário se modificou com advento da computação de alta performance e dos algoritmos intensivos como o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC). O algoritmo de Metropolis-Hastings (um tipo de MCMC), por exemplo, é o algoritmo mais utilizado e citado em inferência estatística. Assim, a incorporação de uma estrutura Bayesiana em modelagem de curvas de crescimento deve ser alvo de estudos científicos que possam inferir sobre sua utilidade em Ciências Florestais.

Desta forma, objetivou-se com este trabalho estudar a família geral de variáveis aleatórias simétricas considerando a suposição de transformações monotônicas da variável resposta pelo modelo de Box-Cox com uma família funcional não-linear para os parâmetros do modelo de Chapman-Richards e realizar a inferência Bayesiana da equação resultante, via algoritmo de Metropolis-Hastings e diagnósticos de ajuste, em dados de alturas de clones de *Eucalyptus urophylla*, provenientes de experimento implantado no Instituto Agronômico de Pernambuco (IPA), na cidade de Araripina, num período que compreende desde o plantio até data próxima a sua derrubada.

2 Revisão de Literatura

2.1 Polo Gesseiro do Araripe

A madeira é uma importante fonte renovável de energia. O manejo adequado de florestas e o uso racional da madeira como energia podem promover a oferta de energia renovável e de grande qualidade ecológica, diferente dos derivados de petróleo e carvão mineral, que são fontes esgotáveis de energia e que difundem na atmosfera, por ocasião da queima, o carbono entre outros poluentes, causando problemas de aquecimento global (GATTO, 2003).

O mineral gipsita é um diidrato do sulfato de cálcio (CaSO4.2H2O) amplamente utilizado na fabricação de cimento e revestimentos em habitações (BALTAR et al, 2005). Segundo o dicionário Aurélio, gesso é um pó branco, derivado da gipsita, que ao ser misturado à água, forma uma pasta que endurece rapidamente. É empregado na composição de estuques, fabricação de estátuas, na imobilização de membros fraturados etc. Serve também para envolver os moldes de cera dos dentes feitos pelos dentistas e para muitos outros fins. Peres et al (2008) e Baltar et al (2005) indicam alguns outros usos da gipsita e derivados em alguns dos setores produtivos e científicos da sociedade (Tabela 1).

Segundo Sobrinho et al (2003) citado por Silva (2009), o Brasil, com sua reserva estimada em $1.452.198.000t$ de gipsita, tem destaque mundial nas reservas deste mineral. As maiores concentrações estão na Bahia (44%), Pará (31%) e Pernambuco (18%). A gazidas de melhores condições de aproveitamento e acessibilidade estão situadas na Chapada do Araripe, localizada no extremo oeste do estado de Pernambuco. Esta microrregião, onde fica o Arranjo Produtivo Local (APL), é formada pelos munícipios de Araripina, Bodocó, Cedro, Dormentes, Exu, Granito, Ipubí, Moreilândia, Ouricuri, Parnamirim, Santa Cruz, Santa Filomena, Serrita, Terra Nova e Trindade (Figura 1). Atualmente, o Estado de Pernambuco responde por cerca de 95% da produção nacional (SINDUSGESSO, 2009). Além disso,

[1]variedade de gesso, proveniente de calcinação da gipsita por autoclave, apresentando uma menor demanda de água para formação da pasta, resultando em produtos de melhor qualidade.

[2]variedade de gesso mole e de grãos finos.

Tabela 1: Usos da gipsita e derivados.

Setor	Material	Uso
Construção civil	pranchas, blocos, e placas de gesso, gesso acartolado e chapas de fibra prensada	revestimento de alvenarias, fabricação de cimentos, cobertura de tetos, etc.
Agricultura	gipsita moída (gesso agrícola)	neutralização de solos alcalinos e salinos, aumento da permeabilidade dos solos argilosos.
Cerâmica	gesso	processos de colagem (fabricação de louças sanitárias) e prensagem (fabricação de louças de mesa)
Tratamento de Água	gesso	modificação da qualidade da água, principalmente na correção da dureza.
Elétrica/Automobilística	gesso alfa[1]	bandagens de alta resistência elétrica e mecânica.
Química	gipsita	utilizada como matéria-prima na produção do enxofre, ácido sulfúrico, cimento e sulfato de amônio.
Medicina	gesso	elaboração de próteses provisórias e em ambientes laboratoriais.
Educação	gesso giz[2]	utilizado nas salas de aulas em escolas, entre outros.

as reservas de gipsita do Araripe são consideradas as melhores do mundo (BALTAR et al, 2003).

A cadeia produtiva do gesso no Araripe é, altamente, dependente do gesso, sendo gerados 13,2 mil empregos diretos e 66 mil indiretos, resultantes da extração em 42 minas, 140 indústrias de calcinação e, aproximadamente, 726 indústrias de pré-moldados, com renda anual de cerca de US$ 300 milhões (SINDUSGESSO, 2009).

O setor de produção secundária, no qual se enquadram as calcinadoras do Araripe, consome, predominantemente, a biomassa florestal como fonte energética. Seu consumo oscila de acordo com os preços dos derivados de petróleo, notadamente, o óleo BPF (baixo poder de fusão), que também é empregado. O alto preço do óleo BPF faz com que as empresas migrem para o consumo de lenha, aliado a outros fatores incentivadores como a

Figura 1: Localização do Pólo Gesseiro do Araripe. Fonte: GADELHA, 2010.

precária fiscalização que facilita o uso de madeira proveniente de desmatamentos ilegais. Atualmente, cerca de 3% das empresas instaladas no Araripe utilizam energia elétrica, 5% óleo diesel, 8% óleo BPF (baixo poder de fusão), 10% coque e 73% lenha (ATECEL, 2006).

A degradação ambiental no Araripe está fortemente associada ao beneficiamento mineral, predominantemente, a gipsita. Em consequência, os estoques lenheiros da região foram reduzidos ao longo do tempo. Desta forma, as indústrias são obrigadas a adquirir lenha de estados vizinhos, encarecendo os custos e alastrando o problema para outras áreas (GADELHA et al, 2010).

Diante da pressão que a flora nativa vem sofrendo e como o aumento da oferta de outras fontes energéticas é inviável alguma medida para aumentar a oferta de lenha na região tem prioridade. Os manejos sustentáveis de florestas de rápido crescimento passam a ter um importância na minimização da pressão sobre a mata nativa, pois podem suprir a demanda de lenha da indústria gesseira e, assim, atenuar a devastação florestal da região pela oferta de madeira em menor espaço de tempo e maior volume.

2.2 Eucaliptos como Fonte de Energia Alternativa

O eucalipto é um gênero que agrega mais de 700 espécies, em sua maioria originárias da Austrália, com algumas poucas variedades oriundas de territórios vizinhos como Nova Guiné e Indonésia (SCHUMACHER et al, 2005).

A disseminação de sementes de *Eucalyptus* no mundo começou no início do século XIX, na América do Sul. O primeiro país a produzi-lo foi o Chile em 1823, e, posteriormente, a Argentina e o Uruguai. No Brasil, as primeiras mudas chegaram em 1824, e foram plantadas no Jardim Botânico do Rio de Janeiro, criado em 1808 por D. João VI. O primeiro

plantio experimental no Brasil foi implantado entre 1904 e 1909 pelo agrônomo Navarro de Andrade, funcionário da Cia. Paulista (ANDRADE, 1911).

Em função dos altos índices de produtividade e características energéticas, como densidade da madeira e poder calorífico, o gênero *Eucalyptus* é o mais utilizado para a implantação de florestas com fins energéticos. As principais espécies de eucaliptos utilizadas são: *Eucalyptus grandis*, *E. urophylla*, *E. urograndis* (híbrido), *E. camaldulensis*, *E. citriodora*, *E. cloeziana*, *E. globulus*, *E. maculata*, *E. paniculata*, *E. pellita*, *E. pilularis*, *E. saligna* e *E. tereticornis* (MORA e GARCIA, 2000; TRUGILHO, et al, 2001). A Figura 2 mostra toras seca e empilhadas de eucaliptos prontas para alimentar fornos da região.

Figura 2: Toras de *Eucalyptus* secas e empilhadas retiradas de manejo florestal na Chapada do Araripe.

As plantações florestais têm papel fundamental na regulação dos recursos hídricos, sequestro de CO_2, auxílio da recuperação de áreas degradadas pelo uso de espécies leguminosas fixadoras de nitrogênio, manutenção e melhoria da qualidade da água, diminuição da pressão sobre as florestas nativas, entre outros, quando bem manejadas.

2.3 Modelo Estatístico

Cordeiro e Andrade (2007) desenvolveram uma nova classe de modelos lineares generalizados transformados (MLGTs) que visam estender os modelos de Box e Cox (1964) para os modelos da família exponencial. Cordeiro e Andrade (2009) propõem outra classe de modelos de regressão denominada modelos simétricos transformados (MSTs), que também generalizam os modelos de Box e Cox.

O uso de transformações em análise de regressão é muito comum e pode ser útil quando o modelo original não satisfaz as suposições usuais. A família de transformação

proposta por Box e Cox (1964) representa uma ferramenta útil para estatísticas aplicadas tratando dos aspectos de homogeneidade de discrepância, aditividade e normalidade.

Draper e Cox (1969) mostram que a estimação de λ, o parâmetro de transformação do modelo de Box-Cox, é bastante robusta em relação à não normalidade contanto que a variável tenha uma distribuição razoavelmente simétrica, esse pode não ser o caso, quando assimetria é encontrada. Embora a transformação potência seja extensivamente usada, raramente, essa transformação cumpre as suposições básicas de normalidade e homoscedasticidade, simultaneamente. Essa transformação encontra aplicação prática na determinação empírica de relações funcionais em vários campos como econometria, demografia, entomologia, zoologia, aquicultura, manejo florestal, entre outros.

A nova classe de modelos simétricos transformados permite ajustar inúmeros modelos e uma ampla variedade de dados, que não são passíveis de modelagem via teoria clássica dos modelos não lineares. Além disso, essa nova classe de modelos inclui distribuições tais como normal, t de Student, potência exponencial, logísticas tipo I e II, Cauchy e os modelos normais contaminados (CYSNEIROS et al, 2005).

Box e Tiao (1973) definem distribuições a priori e posteriori, supondo resposta normal, para modelos com transformação uniparamétrica e biparamétrica e realizam a análise dos efeitos das estimativas após a transformação.

2.4 Modelos de Crescimento

Bertalanffy (1934) definiu crescimento como um aumento mensurável de um sistema orgânico em função da assimilação de material proveniente de seu ambiente. Nas ciências biológicas, as funções de crescimento têm sido usadas por muitos anos, principalmente, para prover dados de crescimento de um organismo em um determinado tempo (LIMA-FILHO, 2009).

A análise de dados de crescimento é importante em muitas áreas de estudo. Vários profissionais estão interessados na descrição do crescimento e em tentar entender seu mecanismo subjacente. Médicos estão interessados no crescimento infantil, bem como no crescimento de tumores e o efeito de tratamentos sobre tais crescimento. Na área social o interesse pode estar no crescimento de populações ou crescimento de demanda de energia. Estudos de crescimento e produção tratam do desenvolvimento de mecanismos de predição das características quantitativas de um povoamento florestal em condições específicas, principalmente, visando atingir o manejo florestal sustentado.

O desenvolvimento de novos modelos de crescimento tem tido avanços consideráveis nas ciências florestais, como ocorreu com a generalização de Chapman-Richards para o modelo de Bertalanffy (TURNBULL, 1963) e trabalhos de Prodan (1968) dando um tratamento compreensivo de várias funções de crescimento e leis de crescimento estudadas com referência ao crescimento florestal. Esses modelos são formulações não lineares que, por meio de curvas de crescimento procuram explicar as relações de crescimento inerentes a várias partes do organismo vegetal, até a sua maturidade, em situações ambientais distintas.

Na literatura, são propostos vários modelos não-lineares para descrever curvas de crescimento tais como: Logístico, Gompertz, Bertalanffy, Weibull, Chapman-Richards, Schumacher, Silva-Bailey, entre outros(SCHNEIDER et al, 1997). Esses modelos são aplicados, na maioria das vezes, à populações naturais e supõem um parâmetro assintóticos, como W_∞, representando a altura/comprimento assintótico, ou P_∞, peso assintótico. Tais quantidades são interpretadas, respectivamente, como a altura, comprimento ou peso médio que os indivíduos da população devem adquirir ao término do crescimento.

Os modelos de crescimento têm uma hipótese associada a causa ou função do fenômeno descrito pela variável resposta e têm um significado a partir de parâmetros florestais. A Tabela 2, a seguir, contém alguns dos principais modelos de crescimentos abordados em Ciências Florestais (BRITO, 2005; SCHNEIDER et al, 2009).

Tabela 2: Alguns modelos de crescimento usados em Ciências Florestais.

Nome	Modelo
Bertalanffy	$y = \alpha\{1 - \beta\exp[-\kappa(x-\delta)]\}^{-3} + \epsilon$
Cauchy	$y = \{1/\left[\alpha(x+\delta)^2 + \kappa\right]\} + \epsilon$
Brody	$y = \alpha - \beta\exp(-\kappa x) + \epsilon$
Chapman-Richards	$y = \alpha\{1 - \beta\exp[-\kappa(x-\delta)]\}^{-\frac{1}{1-\gamma}} + \epsilon$
Gompertz	$y = \alpha\exp\left[-\exp\left(\delta - \kappa x\right)\right] + \epsilon$
Korsun	$y = \alpha\exp(-\kappa x^\delta) + \epsilon$
logístico	$y = \alpha\{1 - \beta\exp[-\kappa(x-\delta)]\}^{-1} + \epsilon$
Mitscherlich	$y = \alpha\{1 - \exp[-\kappa x]\} + \epsilon$
Prodan	$y = [x^2/(\alpha + \beta x + \kappa x^2)] + \epsilon$
Schumacher	$y = \alpha\exp(-\kappa x^{-1}) + \epsilon$
Silva-Bailey	$y = \alpha\exp[-\beta\kappa^x] + \epsilon$
Weibull	$y = \alpha - \beta\exp(-\kappa x^\delta) + \epsilon$

em que, x é o tempo, y é a altura da árvore e α, β, κ, δ e γ são parâmetros que definem cada modelo. Esta notação foi escolhida genericamente, de tal forma que, o parâmetro α, por exemplo, poderá ser encontrado em diversos outros textos com as seguintes notações: W_∞, L_∞, P_∞ ou U, dependendo da área do conhecimento e da variável (altura, peso, etc.)

que represente.

2.5 Modelos de Chapmam-Richards

Bertalanffy (1957) considerou o crescimento animal como um resultado da dinâmica do anabolismo e catabolismo corporal. Em seu modelo (2.1), a taxa de anabolismo ϱ é proporcional à superfície do organismo, enquanto a taxa de catabolismo k é proporcional ao seu volume:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varrho y^{\gamma} - k\, y^{n}. \tag{2.1}$$

Bertalanffy, tomando $n = 1$, realizou experimentos em mamíferos e foi capaz de determinar, a partir da frequência cardíaca e do peso, o valor γ como sendo igual a 2/3 (SILVA, 1986). Richards (1959), realizando experimentos com peso da variedade de melão *Cumulus melo*, considerou o expoente $2/3$ muito restritivo. Na realidade, o expoente γ toma diversos valores, dependendo da população. Os mesmos resultados foram encontrados por Chapman (1961), em trabalho totalmente independente, com peso e comprimento de peixes. Após integração da equação diferencial (2.1) supondo $n = 1$ e γ variável é possível encontrar o modelo (2.2) que, após trabalho de Turnbull (1963) em pesquisa florestal, ficou conhecido como modelo de Chapman-Richards (SILVA, 1986)

$$y = \alpha\{1 - \beta \exp[-\kappa(x - \delta)]\}^{-\frac{1}{1-\gamma}} + \epsilon \tag{2.2}$$

em que, α é o tamanho assintótico amostral, κ é o parâmetro relacionado ao ponto de inflexão, δ é o tempo inicial, γ é o parâmetro generalizado do modelo de Chapman-Richards e β funciona como taxa de aceleração do crescimento. Na prática, β é, por vezes, suprimido, pois na maioria dos casos o valor estimado é muito próximo de um. Para detalhes relacionados à obtenção da fórmula (2.2) veja (BRITO, 2005).

É possível notar que o modelo de Chapman-Richards generaliza os modelos de Bertalanffy ($\gamma = 2/3$), Logístico ($\gamma = 2$) e Mitscherlich ($\gamma, \delta = 0$, $\beta = 1$).

2.6 Estimação por Máxima Verossimilhança

Em estatística é bastante comum estimar o valor dos parâmetros de um modelo pelo método de Mínimos Quadrados. Estas estimativas conhecidem com as estimativas obtidas

pelo método de máxima verossimilhança, sob a suposição de distribuição normal para os erros. A importância deste último consiste nas boas propriedades assintóticas dos estimadores, tais como consistência e eficiência assintótica. Além disso, é possível realizar estimação via Máxima Verossimilhança para distribuições diferentes da normal.

Seja $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ o vetor de observações independentes e identicamente distribuídas (iid) de uma variável aleatória $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ gerada de uma função densidade de probabilidade (fdp) conhecida $f(\underline{y}; \underline{\theta})$ de alguma família de distribuições $\mathcal{F}$, denominada função do modelo estatístico, dependente de um vetor de parâmetros desconhecidos $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$. Define-se também, $\Theta \subseteq \Re^p$ o espaço paramétrico representando o conjunto de valores possíveis do vetor $\underline{\theta}$ (BRITO, 2009).

A função de verossimilhança para $\underline{\theta}$ baseada na observação $Y = y$ é expressa por $L(\underline{\theta}) = L(\underline{\theta}; \underline{y}) = f(\underline{y}; \underline{\theta}), \quad \underline{\theta} \in \Theta$. Frequentemente, as componentes de $\underline{Y}$ são mutuamente independentes para todas as distribuições em $\mathcal{F}$ e a função de verossimilhança de $\underline{\theta}$ pode ser escrita como

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i; \underline{\theta}),$$

em que f_i representa à fdp individual da i-ésima observação.

Seja $F_\theta \in \mathcal{F}$ a distribuição associada à $\underline{Y}$. Conforme Cordeiro (1999) as seguintes suposições, denominadas condições de regularidade, são requeridas:

(i) as distribuições F_θ são identificáveis, isto é, $\theta \neq \theta' \Rightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}$.

(ii) o conjunto $A = \{y; f(y; \theta) > 0\}$ não depende de θ, isto é, as distribuições F_θ têm o mesmo suporte $\forall\ \theta \in \Theta$.

(iii) existe um aberto $\Theta_1 \subseteq \Theta$ tal que $\theta_0 \in \Theta_1$ e a densidade $f(y; \theta)$ admite as derivadas em relação a θ, até a 3^a ordem, $\forall\ \theta \in \Theta$.

(iv) $E_\theta[U(\theta)] = 0$ e a matriz $0 < E_\theta\left[-\frac{\partial^2 \log(L(\underline{\theta}))}{\partial \theta^2}\right] < \infty\ \ \forall\ \theta \in \Theta$.

(iv) $\exists$ funções $M_{ijk}(y)$ independentes de θ tais que, para $i, j, k = 1, ..., p$,

$$\left|\frac{\partial^3 \log(f(y; \theta))}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}\right| < M_{ijk}(y)$$

$\forall\ \theta \in \Theta_1$, em que $E_\theta[M_{ijk}(Y)] < \infty$.

Essas condições garantem expansões em série de Taylor e técnicas similares à função $\log(L(\underline{\theta}))$.

Para Cordeiro (1999), a inferência de verossimilhança pode ser considerada como um processo de obtenção de informação sobre o vetor $\underline{\theta}$, a partir do ponto $\underline{y}$ do espaço amostral, pela da função $L(\underline{\theta})$. Não há, em geral, uma correspondência biunívoca entre os vetores $\underline{y}$ e $L(\underline{\theta})$, equivalentemente, uma certa verossimilhança pode corresponder a um contorno R($\underline{y}$). Este processo reduz a informação sobre $\underline{\theta}$ disponível em $\underline{y}$, para as estatísticas suficientes. Usualmente, trabalha-se o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\underline{\theta})$, denominado função de log-verossimilhança. Como a função logaritmo é monótona crescente, maximizar $L(\underline{\theta})$ e $\ell(\underline{\theta})$ em Θ são processos equivalentes. A função de log-verossimilhança, também chamada função suporte, pode ser escrita como:

$$\ell(\underline{\theta}) = \log(L(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^{n} \log\{f_i(y_i; \underline{\theta})\}.$$

Seja a função $L(\cdot)$, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\underline{\theta}}$ de $\underline{\theta}$ é o valor que maximiza $L(\underline{\theta})$ em Θ, isto é, $L(\widehat{\underline{\theta}}) \geq L(\underline{\theta})$ para todo $\underline{\theta} \in \Theta$. Então, a EMV é definida de modo que, para todo $\underline{\theta} \in \Theta, \ell(\widehat{\underline{\theta}}) \geq \ell(\underline{\theta})$.

A função escore $\underline{U}(\underline{\theta}) = (U(\theta_1), \ldots, U(\theta_p))^\top$ é definida como

$$U_r(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_r}, \quad r = 1, \ldots, p.$$

Se $\underline{\theta}$ é um conjunto finito, calcula-se $\ell(\underline{\theta}) = 0$ para os diversos valores de $\underline{\theta}$'s e se escolhe $\hat{\underline{\theta}}$ como o valor de $\underline{\theta}$ correspondente ao máximo $\ell(\underline{\theta})$. Quando $\ell(\underline{\theta})$ é contínua e diferenciável em Θ, a EMV $\hat{\underline{\theta}}$ pode ser obtida resolvendo o sistema de equações simultâneas $\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \theta_r} = 0$ para $r = 1, \ldots, p$, desde que $\underline{\theta}$ não se encontre fora da fronteira do espaço paramétrico, caso em que não há convergência.

A matriz de primeiras derivadas da função escore com sinal negativo (CORDEIRO, 1999)

$$J_F(\underline{\theta}) = -\frac{\partial \underline{U}(\underline{\theta})^\top}{\partial \underline{\theta}} = -\frac{\partial^2 \ell(\underline{\theta})}{\partial \theta \partial \theta^\top}$$

é denominada matriz de informação observada (BRITO, 2009). A matriz Hessiana é simplesmente $-J_F(\underline{\theta})$ e sob as condições de regularidade, tem-se $E_\theta[J_K(\underline{\theta})] = K(\underline{\theta})$, em que o subscrito $\underline{\theta}$ indica que a esperança matemática é calculada supondo que $\underline{\theta}$ é o verdadeiro valor do parâmetro (COX e HINKLEY, 1974; LEHMANN, 1999). A matriz $K(\underline{\theta})$ é chamada de matriz de informação (esperada) de Fisher para $\underline{\theta}$. Para $\hat{\underline{\theta}}$ ser o máximo local as condições $\underline{U}(\underline{\theta}) = 0$ e $\hat{J_K} = J_K(\hat{\underline{\theta}}) \geq 0$ ($\hat{J_K}$ positiva semi-definida) são necessárias, enquanto que $\hat{\underline{U}} = 0$ e $\hat{J_K} \geq 0$ ($\hat{J_K}$ positiva definida) são suficientes.

Cordeiro (1999) verifica que, sob as condições de regularidade, o estimador de máxima

verossimilhança $\widehat{\underline{\theta}}$ apresenta as seguintes propriedades:

(i) É consistente;

(ii) É assintoticamente eficiente, isto é, dentre todos os estimadores consistentes de $\underline{\theta}$, o estimador de máxima verossimilhança possui variância assintótica mínima;

(iii) É invariante sob transformação biunívoca, ou seja, se $\widehat{\underline{\theta}}$ é estimador de máxima verossimilhança de $\underline{\theta}$ e g é função bijetora, então $g(\widehat{\underline{\theta}})$ é estimador de máxima verossimilhança de $g(\underline{\theta})$;

(iv) Tem distribuição assintótica normal p-variada, em que p é a dimensão do vetor $\underline{\theta}$, da forma

$$\widehat{\underline{\theta}} \sim N_p\left(\underline{\theta}, \underline{K}(\underline{\theta})^{-1}\right);$$

(v) É, em geral, viesado, embora seja assintoticamente não-viesado.

2.7 Métodos Iterativos em Otimização

Resolver o sistema $U(\underline{\theta}) = 0$ em relação aos parâmetros, não é geralmente, uma tarefa simples, pois em geral, o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\underline{\theta}}$ de $\underline{\theta}$ não apresenta forma analítica fechada. As estimativas devem ser encontradas por meio da maximização numérica do logaritmo da função de verossimilhança com de procedimentos iterativos. Os métodos iterativos para o cálculo da EMV são bastante utilizados na prática e, em geral, mostram-se imprescindíveis quando a dimensão p do espaço paramétrico é grande (CORDEIRO, 1999). Entre os métodos iterativos, destacam-se: algoritmo de Newton-Raphson, Escore de Fisher, entre outros.

2.7.1 Algoritmo de Newton-Raphson

Expandindo $\hat{\underline{U}}$ em série multivariada de Taylor até primeira ordem ao redor de um ponto qualquer $\underline{\theta}$ pertencente ao domínio de $\hat{\underline{\theta}}$, tem-se:

$$\hat{\underline{U}} = \underline{U} + \frac{\partial \underline{U}^T}{\partial \underline{\theta}}(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}) + O_p(n)$$

como $\hat{\underline{U}} = \mathbf{0}$, obtém-se aproximadamente:

$$\hat{\underline{\theta}} = \underline{\theta} + \underline{J}^{-1}\underline{U} + O_p(n^{-1})$$

em que

$$J(\hat{\underline{\theta}}) = \frac{\partial \underline{U}^T}{\partial \underline{\theta}} = \left.\frac{\partial^2 \ell(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}^\top}\right|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$$

é a matriz de segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança. A seguir, fazendo-se $\underline{U}(\underline{\theta}) = 0$ e repetindo o procedimento acima, chega-se à seguinte fórmula:

$$\underline{\theta}^{(k+1)} = \underline{\theta}^{(k)} + \underline{J}(\underline{\theta}^{(k)})^{-1}\underline{U}(\underline{\theta}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

podendo ser generalizado da forma

$$\underline{\theta}^{(k+1)} = \underline{\theta}^{(k)} + \lambda^{(k)}\underline{J}(\underline{\theta}^{(k)})^{-1}\underline{U}(\underline{\theta}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

em que o termo $\lambda^{(k)}$ é um escalar acelerador, normalmente se toma $\lambda^{(k)} = 1$. Este processo é repetido até se obter uma distância entre $\underline{\theta}^{(k+1)}$ e $\underline{\theta}^{(k)}$ que seja inferior que a tolerância especificada.

2.7.2 Algoritmo Escore de Fisher

Este procedimento se baseia em substituir a matriz $\underline{J}$ por seu valor esperado $E(\underline{J}) = \underline{K}$, a matriz de informação esperada (LEE, 2006). Assim, a equação (2.3) é reescrita na forma

$$\underline{\theta}^{(k+1)} = \underline{\theta}^{(k)} + \lambda^{(k)}\underline{K}(\theta^{(k)})^{-1}\underline{U}(\underline{\theta}^{(k)}),$$

em que o termo $\lambda^{(k)}$ é um escalar determinado por algum procedimento de busca linear a partir de $\underline{\theta}^{(k)}$ na direção $\underline{K}(\underline{\theta}^{(k)})^{-1}\underline{U}(\underline{\theta}^{(k)})$.

2.8 Principais Distribuições Simétricas

Existem certos conjuntos de dados em que a suposição de normalidade na distribuição dos erros não é possível, mesmo quando se emprega algum artifício. Isso pode acontecer mesmo para dados que apresentem simetria. Desta forma, se for aplicado um modelo, cuja distribuição do erros é normal para esses dados, pode ser que se encontre diversos pontos extremos não explicados pelo modelo, designados aberrantes ou “outliers”. Uma solução seria utilizar outras distribuições que pudessem minimizar a influência de tais observações. É com esse intuito que se define uma nova classe que contém diversas distribuições desse tipo.

Diz-se que a variável aleatória Y tem distribuição simétrica, com suporte em $\mathbb{R}$, com parâmetros de locação $\mu \in \mathbb{R}$ e de escala $\phi > 0$, se sua função densidade é da forma

$$h(y_i; \mu_i, \phi_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}} f\left[\left(\frac{y_i - \mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2\right], \quad y_i \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

para alguma função $f(\cdot)$ denominada função geradora de densidade, com $f(u) > 0$, para $u > 0$ e $\int_0^\infty u^{-1/2} f(u) du = 1$. Essa condição é necessária e suficiente para que $f(y; \mu, \phi)$ seja uma função densidade de probabilidade. Denota-se $Y_i \sim S(\mu_i, \phi_i)$ e denomina-se Y_i de variável aleatória simétrica.

As distribuições mais comuns encontradas na literatura pertencentes a esta família de distribuições simétricas são: As distribuições normal, t de Student, Cauchy, t de Student generalizada, Kotz, Kotz generalizada, Exponencial potência, Logística tipos I e II, Laplace, e generalizações e extensões de algumas distribuições simétricas, entre outras, pertencente a esta classe (CYSNEIROS et al, 2005).

A classe de distribuições simétricas tem recebido crescente atenção na literatura estatística nos últimos anos, ver por exemplo, os livros de Fang et al, (1990), Fang e Anderson (1990), Fang e Zhang (1990).

A seguir, são mostradas algumas distribuições especiais de (2.4), extenções e generalizações, que são de grande importância para aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento (FANG et al, 1990).

2.8.1 Distribuição Normal

A distribuição normal, ou Gaussiana pertence à classe simétrica mais conhecida, devido a diversas propriedades interessantes e ao desenvolvimento teórico e aplicado atingido no decorrer dos anos (CYSNEIROS et al, 2005).

Nos primeiros trabalhos era apresentada como uma aproximação conveniente para a distribuição binomial. No entanto, no início do século XIX, sua importância teórica foi reconhecida por Laplace e Gauss, e daí em diante foi intensivamente estudada por diversos autores (LIMA-FILHO, 2009). Se $Y \sim S(\mu, \phi)$ e a função geradora de densidade $f(\cdot)$ é da forma

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u}{2}\right); \quad u > 0,$$

em que

$$u = \left(\frac{y - \mu}{\phi}\right)^2,$$

então Y tem distribuição normal denotada por $Y \sim N(\mu, \phi)$, em que μ ϕ, os parâmetros de locação e escala, conhecidem com a média e a variância. A função característica é expressa por

$$\xi_y(t) = e^{it\mu} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\phi\right); \quad t \in \mathbb{R}$$

e sua função densidade é expressa por

$$\pi(y; \mu, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sqrt{\phi}}\right)^2\right]; \quad u > 0.$$

2.8.2 Distribuição de Cauchy

A distribuição de Cauchy recebe o nome do famoso matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857), professor da Ecole Polytechnique de Paris desde 1816 até sua morte. Em física, é conhecida como distribuição de Lorentz e tem aplicações ressonância, espectroscopia e difusão atômica (JOHNSON et al, 1994, v. 1).

Diz-se que a variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ tem distribuição de Cauchy se sua função geradora da densidade $h(\cdot)$ tem a forma

$$h(u) = \frac{1}{\pi}(1+u)^{-1}; \quad u > 0.$$

Esta distribuição também é conhecida como distribuição de Pearson tipo VII expressa por $Y \sim C(\mu, \phi)$. A sua função característica é da forma

$$\xi_y(t) = \exp\{it\mu - |t|\sqrt{\phi}\}; \quad t \in \Re.$$

Sua função densidade é expressa por

$$\pi(y_i; \mu_i, \phi_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}}\frac{1}{\pi}\left[1 + \left(\frac{y_i - \mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2\right]^{-1}.$$

A densidade é simétrica em torno de μ com pontos de inflexão $\mu \pm \sqrt{3\phi}$. Os valores da função de distribuição acumulada nos pontos de inflexão são $0,273$ e $0,723$, que podem ser comparados com os correspondentes valores, $0,159$ e $0,841$, da distribuição normal. Uma outra característica importante da distribuição Cauchy é que ela não possui momentos finitos e, portanto, não tem valor esperado e variância (CYSNEIROS et al, 2005). Não se deve, portanto, confundir momentos com os parâmetros de locação μ e escala ϕ. Ela

tem mediana e moda iguais a μ e os quartis superior e inferior são $\mu \pm \sqrt{\phi}$. Note que a distribuição Cauchy possui caudas mais pesadas do que a distribuição normal, conforme Figura 3.

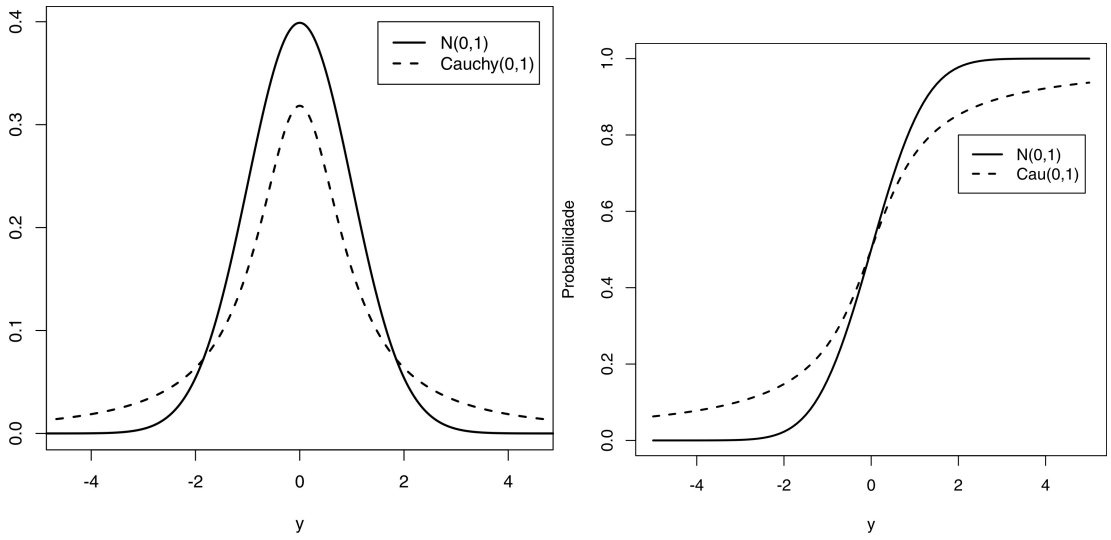

Figura 3: Gráficos de funções densidade e distribuições acumuladas Cauchy e normal

A soma $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ de variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), cada uma com distribuição Cauchy, tem distribuição de Cauchy com, respectivos, parâmetros de locação e escala

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{e} \quad \phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i.$$

Quando os valores dos parâmetros de locação e de escala são iguais a 0 e 1, respectivamente, a distribuição Cauchy passa a ser chamada como Cauchy padrão ou t de Student central com um grau de liberdade. Tem-se, ainda, a relação $Y = \mu + \sqrt{\phi} N_1/N_2$ em que $N_i \sim N(0,1)$ para $i = 1, 2$, sendo N_1 e N_2 independentes, que pode ser usada para definir um gerador de números aleatórios para a distribuição de Cauchy com parâmetros (μ, ϕ).

2.8.3 Distribuição de Laplace

A distribuição exponencial dupla é também denominada distribuição de Laplace em homenagem ao astrônomo, matemático e físico francês marquês Pierre Simon de Laplace (JOHNSON et al, 1994, v. 2).

Essa distribuição surge a partir da diferença entre duas variáveis independentes com distribuição exponencial. É uma distribuição simétrica com caudas mais pesadas que a normal, porém mais leves que as da distribuição Cauchy, apresentando descontinuidade

do primeiro tipo em $x = \mu$. É interessante notar que o melhor estimador para o parâmetro de locação μ é a mediana e não a média amostral.

Se Y tem uma função densidade de uma distribuição de Laplace ou Exponencial dupla, então a função geradora de densidades $h(\cdot)$ é da forma

$$h(u) = \frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{u}\right), \quad u > 0.$$

denotada por $Y \sim ED(\mu, \phi)$. Sua função característica tem a forma

$$\xi_y(t) = \frac{e^{it\mu}}{1 + t^2\phi}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A mediana, a moda e a média da variável y são iguais a μ, $Var(y) = 2\phi$, o coeficiente de assimetria é $\alpha_3 = 0$ e o coeficiente de curtose é $\alpha_4 = 6$. Os quartis superior e inferior são $\mu \pm 0.534\sqrt{\phi}$ (JOHNSON et al, 1994, v. 4).

Na Figura 4, encontra-se os gráficos das densidades normal e exponencial dupla. Observa-se que a distribuição exponencial dupla possui caudas bem mais pesadas que as da distribuição normal. Também é possível notar a não diferenciabilidade no ponto em que a abscissa é igual ao parâmetro de locação.

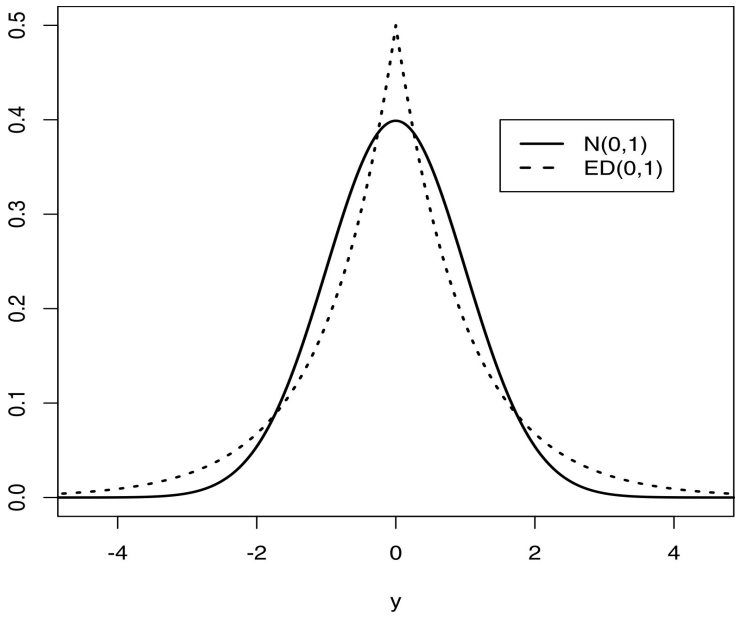

Figura 4: Gráficos de funções densidade exponencial dupla e normal

2.8.4 Distribuição Logística tipo I

Segundo Brito (2009) essa distribuição foi utilizada por Verhulst em 1838 e 1845 para o ajuste de curvas de crescimento demográfico. Pearl e Reed em 1920 e 1924, Pearl et

al, em 1940 e Schultz em 1930 aplicaram o modelo logístico como modelo de crescimento em populações humanas e em alguns organismos biológicos.

Outras aplicações interessantes da distribuição logística são nas áreas de análise de sobrevivência (PLACKEET, 1959) e em modelagem de distribuição de renda (FISK, 1961).

Dize-se que a variável aleatória $Y \sim S(\mu, \phi)$ tem distribuição logística tipo I se a função geradora de densidade $h(\cdot)$ tem a forma

$$h(u) = c\frac{e^{-u}}{[1+e^{-u}]^2}; \quad y > 0,$$

em que c é a constante normalizadora da distribuição, obtida da relação $\int_0^\infty u^{1/2}h(u)du = 1$; logo $c \approx 1,484300027$ e é denotada por $Y_i \sim LI(\mu_i, \phi_i)$. E sua função densidade é expressa por

$$\pi(y_i; \mu_i, \phi_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}} \frac{c\, \exp\left[-\left(\frac{y_i-\mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2\right]}{\left\{1+\exp\left[-\left(\frac{y_i-\mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2\right]\right\}^2}; \quad y > 0.$$

Sua função de distribuição acumulada é frequentemente aplicada em teoria da regressão (regressão logística) e redes neurais.

Tem-se que $E(Y_i) = \mu_i$, $Var(Y_i) \approx 0,79569\phi_i$, o coeficiente de curtose $\alpha_4 \approx 2,385165$ e o coeficiente de assimetria $\alpha_3 = 0$. Note que o coeficiente de curtose desta distribuição é menor do que o coeficiente de curtose da distribuição normal.

Os gráficos das densidades normal e logística tipo I estão na Figura 5. Observar-se a forma achatada no patamar da distribuição logística tipo I que difere da distribuição normal.

2.8.5 Distribuição Logística tipo II

Diz-se que a variável aleatória $Y_i \sim S(\mu_i, \phi_i)$ tem distribuição logística tipo II se a função geradora de densidade $h(\cdot)$ tem a forma

$$h(u) = \frac{\exp(-u^{1/2})}{[1+\exp(-u^{1/2})]^2}, \quad u > 0,$$

expressa por $Y_i \sim LII(\mu_i, \phi_i)$. A função característica é expressa por

$$\xi_y(t) = \frac{2(e^{it\mu}\pi\phi t)}{e^{\pi\phi t} - e^{-\pi\phi t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

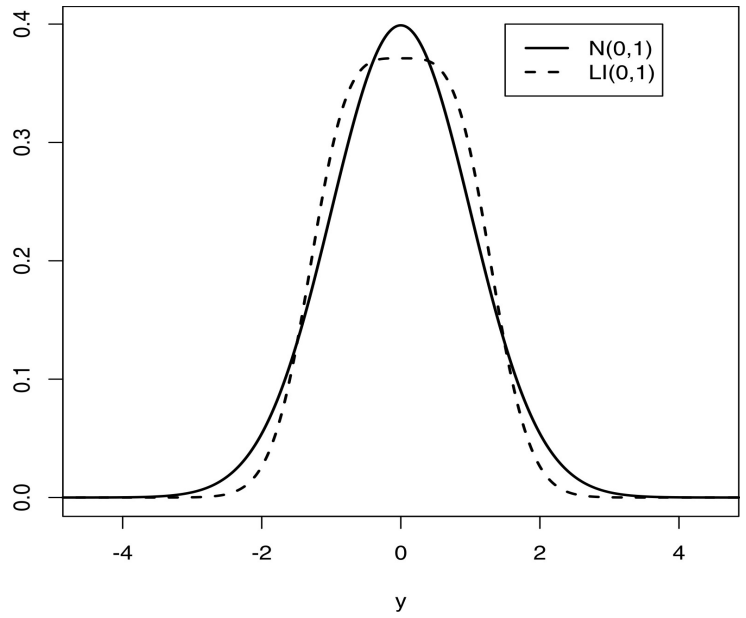

Figura 5: Gráficos de funções densidade logística I e normal

e sua função densidade é expressa por

$$\pi(y_i;\mu_i,\phi_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}}\frac{\exp(-u)}{[1+\exp(-u)]^2},$$

com

$$u_i = \left(\frac{y_i-\mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2$$

Tem-se que $E(Y_i) = \mu_i$, $Var(Y_i) = \pi^2\phi_i/3$, o coeficiente de assimetria é $\alpha_3 = 0$ e o coeficiente de curtose é $\alpha_4 = 4,2$, que é maior que as curtoses das distribuições normal e logística I. Adicionalmente, a mediana e a moda são iguais à média (BRITO, 2009).

Uma relação muito útil para gerar amostras aleatórias é expressa por Merran et al (1975). Seja $u \sim U(0,1)$ e $Y = \mu + \sqrt{\phi}\log(\frac{u}{1-u})$, então $Y \sim LII(\mu,\phi)$.

Na Figura 6 observa-se a forma da distribuição logística II e se constata que ela tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal.

Uma relação importante entre as distribuições logística é que, se X tem distribuição logística tipo I, então $-X$ tem distribuição logística tipo II.

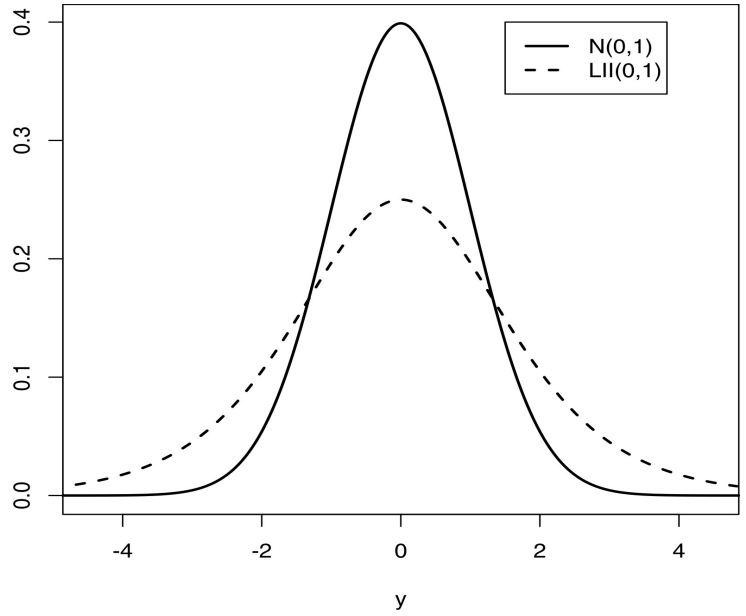

Figura 6: Gráficos de funções densidade logística II e normal

2.8.6 Distribuição t de Student

A variável aleatória $y_i \sim t(\mu_i, \phi_i, \nu)$ tem distribuição t de Student com ν graus de liberdade se sua função geradora de densidade $h(\cdot)$ é expressa por

$$h(u) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)}(\nu + u)^{-(\nu+1)/2}, \quad u > 0 \quad e \quad \nu > 0,$$

em que $B(\cdot, \cdot)$ é a função Beta. Então $y_i \sim t(\mu_i, \phi_i, \nu)$. A função característica definida é expressa por

$$\xi_y = \frac{\nu^{\nu/4}|t|^{\nu/2}K_{\nu/2}(\sqrt{\nu}|t|)}{2^{\nu/2-1}\Gamma(\nu/2)}$$

em que $K_u(\cdot)$ é a função Bessel modificada e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

E sua função densidade é expressa por

$$\pi(y_i; \mu_i, \phi_i, \nu) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)\sqrt{\phi_i}}\left[\nu + \left(\frac{y_i - \mu_i}{\sqrt{\phi_i}}\right)^2\right]^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 0,$$

A distribuição t é simétrica em torno de μ. Quando $\nu \longrightarrow \infty$, a distribuição de t tende para a distribuição normal com média μ e variância ϕ. Quando $\nu = 1$, a distribuição se reduz à distribuição Cauchy com parâmetros μ e ϕ. A distribuição t com ν graus de liberdade foi originada da razão $t_\nu = U(\frac{\chi^2_\nu}{\nu})^{-1/2}$, em que U é a variável aleatória normal padrão e χ^2_ν é uma variável aleatória qui-quadrado com ν graus de liberdade, sendo ambas

independentes (LIMA-FILHO, 2009).

Todos os momentos ordinários são da forma

$$E\{(Y_i-\mu_i)^r\}=\begin{cases}\dfrac{\nu^{r/2}\Gamma((r+1)/2)\Gamma((\nu-r)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}\phi_i=0, & r \text{ ímpar}\\ \dfrac{\nu^{r/2}\Gamma((r+1)/2)\Gamma((\nu-r)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}\phi_i, & r \text{ par}\end{cases}$$

Assim, $E(Y_i)=\mu_i$, se $\nu>1$ e $Var(Y_i)=\phi_i\nu/(\nu-2)$, se $\nu>2$. Se $\nu\leq r$ e r é par, o momento de ordem r é infinito. O desvio médio é dado por

$$E[|Y|]=\frac{\nu^{1/2}\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu/2)}.$$

O coeficiente de assimetria é $\alpha_3=0$ e o coeficiente de curtose é $\alpha_4=3+6/(\nu-4)$ para $\nu>4$, sendo este coeficiente maior do que o coeficiente de curtose da distribuição normal. A função densidade de Y tem pontos de inflexão em $y=\pm\sqrt{\nu/(\nu+2)}$.

A distribuição t de Student é utilizada para modelar o comportamento de dados que provêm de uma distribuição com caudas mais pesadas que a normal, permitindo reduzir a influência de observações aberrantes.

Lange et al (1989) propõem o modelo t de Student como uma extensão paramétrica robusta do modelo normal, já que a t de Student é uma distribuição que permite ajustar a curtose da distribuição dos dados através do parâmetro ν.

Na Figura 7, observa-se a forma da distribuição t de Student para alguns valores de ν.

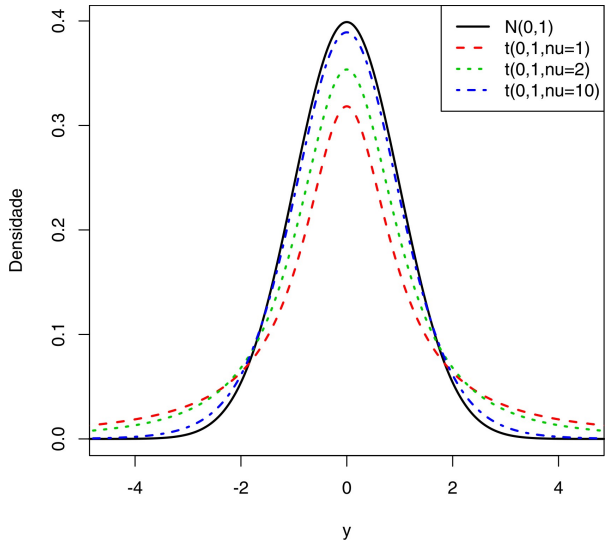

Figura 7: Gráficos de funções densidade t de Student e normal

As formas das distribuições normal, Cauchy, Laplace, logística I e II e t de Student, todas com parâmetros de locação $\mu = 0$ e parâmetro de escala $\phi = 1$ e grau de liberdade $\nu = 1$ no caso da distribuição t de Student estão na Figura 8.

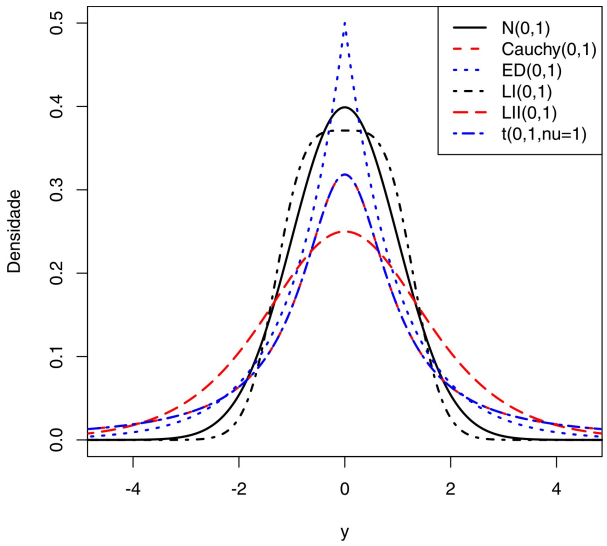

Figura 8: Gráficos das funções densidade normal, Cauchy, Laplace, logística I e II e t de Student padronizadas ($\nu = 1$).

Note que, exceto a distribuição logística tipo I, todas as distribuições têm caudas mais pesadas que a normal. Isto é, está distribuição se ajusta à dados concentrados em torno da média.

2.8.7 Estatísticas de Algumas Distribuições Simétricas

Na Tabela 3 segue, em resumo, as variâncias σ^2 e os coeficientes de curtose

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{(\sigma^2)^2}, \tag{2.5}$$

em que $m_4 = \sum_{i=1}^{n}(y - \bar{y})^4/n$ é o quarto momento central, para algumas distribuições simétricas. A variância é uma medida de dispersão dos em torno de um valor médio. Já o coeficiente de curtose informam sobre o quanto medidas raras se afastam da média. Essa medida é importante, pois determina o achatamento da distribuição, sendo valores maiores que 3 relacionados com caudas mais pesadas que a normal e valores menores relacionados com caudas mais leves. É comum se obter o coeficiente de curtose padronizado, subtraindo-se 3 do coeficiente original, assim a comparação anterior se dá entre valores positivos e negativos (CRAWLEY, 2007). O coeficiente de assimetria é, naturalmente, zero para as distribuições simétricas.

Na Figura 9, observa-se o valor da curtose de distribuições simétricas em função dos

Tabela 3: Valores das variâncias e do coeficiente de curtose para algumas distribuições simétricas.

Distribuição	variância	curtose
Normal	ϕ	3
Cauchy	não existe	não existe
Laplace	2ϕ	6
Logística I	0.79569ϕ	$2,385165$
Logística II	$\pi^2\phi/3$	$4,2$
t de Student	$\{\nu(\nu-2)\}\phi$	$3+6/(\nu-4)$

graus de liberdade. Nota-se que a curtose distribuição t de Student, com 1 grau de liberdade, assume diversos valores e que tende para a curtose da normal quando $\nu \to \infty$ (LEIVA et al, 2009).

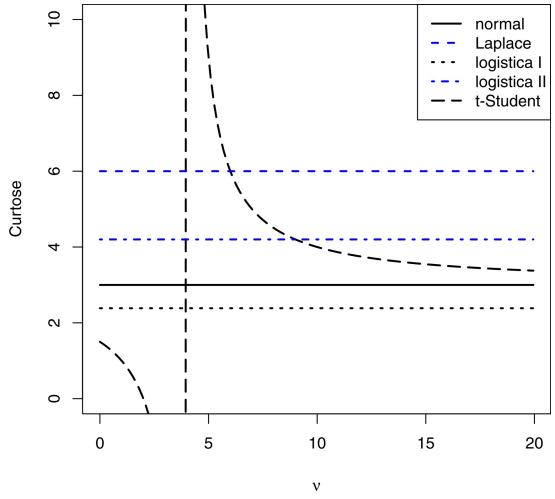

Figura 9: Gráficos do coeficiente de curtose em função dos graus de liberdade para as distribuições normal, Laplace, logística I e II e t de Student ($\nu = 1$).

2.9 Modelos Simétricos Transformados

Considere a família paramétrica de transformações $\mathcal{G}$ da variável Y expressa por

$$\mathcal{G} = \{\Lambda = \Lambda(Y, \underline{\lambda});\ Y \sim S(\mu, \phi),\ \underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)^T\}, \tag{2.6}$$

em que μ e ϕ são os, respectivos, parâmetros de locação e escala do modelo simétrico e $\underline{\lambda}$ é o vetor de m parâmetros de transformação de Y. Seja $\underline{Y}^{(\lambda)}$ a imagem de Λ pela função

$$\underline{Y}^{(\lambda)} = \Lambda(\underline{Y}, \underline{\lambda}). \tag{2.7}$$

Para cada conjunto de parâmetros $\underline{\lambda}$, $\underline{Y}^{(\underline{\lambda})}$ é uma função monotônica de $\underline{Y}$. As transformações mais utilizadas são as de Box e Cox (1964) expressas por:

$$\underline{Y}^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{\underline{Y}^{\lambda} - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0; \\ \log(\underline{Y}), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

e

$$\underline{Y}^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{(\underline{Y} - \lambda_2)^{\lambda_1} - 1}{\lambda_1}, & \text{se } \lambda_1 \neq 0; \\ \log(\underline{Y} + \lambda_2), & \text{se } \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Na prática, a última transformação e uma extensão da primeira, quando há dados negativos e se escolhe $\lambda_2 > 0$, tal que $\forall\ y \in \underline{Y} \Rightarrow \min(y + \lambda_2) > 0$.

Manly (1976) propôs a transformação exponencial para $\underline{Y}'s$ negativos da forma

$$\underline{Y}^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{e^{\underline{Y}\lambda} - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0; \\ \underline{Y}, & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

A transformação de Manly é aplicada para tornar distribuições unimodais em distribuições simétricas próximas da forma da distribuição normal (LIMA-FILHO, 2009). Transformações alternativas são encontradas em Sakia (1992). Silva et al (1994) usaram a família de transformações de Box-Cox na seleção de modelos volumétricos em florestas plantadas. Lima-Filho (2009) aborda os modelos simétricos transformados, utilizando a equação não linear de Chapman-Richards e inferência clássica, para estimar a altura e circunferência de eucaliptos. Santos (2010) estima o volume de eucaliptos com os modelos simétricos transformados e equação volumétrica não linear.

Sejam $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ e $\underline{y}^{(\lambda)} = (y_1^{(\lambda)}, ..., y_n^{(\lambda)})^T$ definidos como antes. Supondo $\underline{Y}^{(\lambda)}$ independentes e cada $Y_i^{(\lambda)}$ com f.d.p simétrica ($Y_i^{(\lambda)} \sim S(\mu, \phi^2)$), $\mu \in \mathbb{R}$ parâmetro de escala e $\phi > 0$ parâmetro de dispersão, obedecendo (2.4).

Para introduzir uma estrutura regressora na classe de distribuições simétricas, toma-se a componente sistemática para o vetor da média $\mu = E(Y^{(\lambda)})$ expressa por (CORDEIRO e ANDRADE, 2009)

$$g(\mu) = \eta_i(\underline{\beta}) = h(x_i, \underline{\beta}), \tag{2.9}$$

sendo $g(\cdot)$ a função de ligação conhecida, monótona e diferenciável até a segunda ordem, $\underline{X}$ é a matriz $n \times p$ de covariáveis de posto completo $p < n$ e $\underline{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)^T$, ϕ e λ são os $p + 2$ parâmetros desconhecidos a serem estimados.

Definem-se os modelos simétricos transformados (MSTs) pelas famílias de transfor-

mações (2.6) e distribuição (2.4) assumindo componente sistemática (2.9). Isto é, os MSTs assumem que existe algum valor de λ tal que as variáveis aleatórias $Y_1^{(\lambda)}, ..., Y_n^{(\lambda)}$ podem ser tratadas como independentes e identicamente distribuídas com componente sistemática (2.9) e aleatória (2.4).

Conforme Lima-Filho (2009) a função densidade de probabilidade da variável aleatória padronizada $Z^{(\lambda)} = (Y_i^{\lambda} - \mu_i)/\sqrt{\phi}$ é $f(v, 0, 1) = h(v^2)$, $v \in \mathbb{R}$, isto é, $Z^{\lambda} \sim S(0, 1)$. A família simétrica de densidades de locação-dispersão guarda a estrutura da distribuição normal abrangendo densidades simétricas com caudas mais leves ou mais pesadas que as caudas da normal.

A função característica de Y_i^{λ} é $\psi(t) = e^{it\mu_i}\varphi(t^2\phi)$, t $\in \mathbb{R}$, para uma função $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Se existirem, $E(Y_i^{(\lambda)}) = \mu_i$ e $Var(Y_i^{(\lambda)}) = k_2\phi$, em que $k_2 = -2\varphi'(0)$ é uma constante e $\varphi' = \varphi(x)/dx \mid_{x=0}$.

2.10 Inferência em Modelos Simétricos Transformados

Sejam $\underline{X}$ a matriz do modelo, $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ os dados originais e $\underline{y}^{\lambda} = (y_1^{(\lambda)}, ..., y_n^{(\lambda)})^T$ as observações transformadas, para alguma transformação do parâmetro λ em (2.6), com componente aleatória (2.4) e sistemática (2.9). Deseja-se realizar inferências sobre o vetor de parâmetros $\underline{\beta}$ e nos escalares ϕ e λ. Seja $J(\lambda, \underline{y})$ o Jacobiano da transformação de $\underline{y}$ para $\underline{y}^{(\lambda)}$. Conforme Cordeiro e Andrade (2009) a log-verossimilhança para os parâmetros é expressa por

$$l(\underline{\beta}, \phi, \lambda) = -\frac{n}{2}\log\phi + \sum_{i=1}^{n}\log h\left\{\phi^{-1}(y_i^{(\lambda)} - \mu_i)^2\right\} + \sum_{i=1}^{n}\log\left\{J(\lambda, y_i)\right\}, \tag{2.10}$$

em que

$$J(\lambda, y_i) = \left|\frac{d\Lambda(y_i, \lambda)}{dy_i}\right|. \tag{2.11}$$

Considerando os modelos simétricos com transformação segundo Box e Cox, tem-se que $J(\lambda, y_i) = \mid y_i \mid^{(\lambda-1)}$.

A função (2.10) pode ser maximizada incondicionalmente usando alguns pacote estatístico como o SAS ou R.

Um intervalo de confiança assintóticos, com nível de significância γ para cada parâme-

tro θ_i, é expresso por

$$IC_{(\theta_i,100(1-\gamma)\%)} = \widehat{\theta}_i \pm z_{\gamma/2}\sqrt{\kappa^{\theta_i}} \tag{2.12}$$

em que $\kappa^{\theta_i} = \kappa^{\theta_i,\theta_i}$ é o i-ésimo componente da diagonal da inversa da informação esperada de Fisher, $K(\underline{\theta})^{-1}$, e $z_{\gamma/2}$ é o quantil $1-\gamma/2$ da distribuição normal padronizada.

2.10.1 Critérios de Seleção de modelos

Muitos procedimentos têm sido propostos com o intuito de comparar modelos. A propriedade interessante de que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança seja assintoticamente eficiente, mostra que a função de verossimilhança tende a ser um critério mais sensível a pequenos desvios dos parâmetros do modelo de seus valores verdadeiros. Seguindo esta ideia, Akaike (1972) apresentou seu método de identificação de modelos. Akaike (1974) descreveu como o problema de seleção de modelos pode sistematicamente ser manuseado pelo uso do critério de informação introduzido em 1972. Esse critério de informação de Akaike (AIC) é uma estatística bem conhecida e de fácil interpretação para seleção de modelos de regressão. Desta forma, para comparar todos os modelos não transformados e transformados ajustados aos dados, pode-se usar o critério de informação de Akaike definido por:

$$AIC = -2\hat{\ell}(\underline{\theta}) + 2r, \tag{2.13}$$

em que $\hat{\ell}(\underline{\theta})$ é a log-verossimilhança maximizada de $\underline{\theta}$ e $r = p+1$ ou $r = p+2$ para os modelos não transformados e transformados, respectivamente, e p é o número de parâmetros do preditor não linear η_i. A equação com o menor valor do AIC, entre todos os modelos ajustados, pode ser considerado como a que melhor explica os dados.

Outro critério de seleção de modelos popular é o BIC (Bayesian Information Criterion), proposto por Schwarz (1978). Este critério pondera entre o número de parâmetros do modelo e a função de log-verossimilhança. O melhor modelo, segundo este critério, será aquele que apresentar o menor BIC expresso por:

$$BIC = -2\hat{\ell}(\underline{\theta}) + r\log(n), \tag{2.14}$$

como antes, $\hat{\ell}(\underline{\theta})$ é a log-verossimilhança maximizada e $r = p+1$ ou $r = p+2$ para os modelos não transformados e transformados, respectivamente, e p é o número de parâmetros do preditor não linear η_i.

Cordeiro e Andrade (2009) calculam o erro quadrático médio (EQM) e o erro percentual absoluto médio (EPAM), para avaliar o melhor modelo. Estes critérios são expressos, respectivamente, por

$$EQM = \frac{100\%}{n\widehat{s^2_{y^{(\hat{\lambda})}}}} \sum_{i=1}^{n} (y^{(\hat{\lambda})} - \widehat{\eta}_i)^2 \tag{2.15}$$

e

$$EPAM = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i^{(\hat{\lambda})} - \widehat{\eta}_i}{y_i^{(\hat{\lambda})}} \right|, \tag{2.16}$$

em que, $\widehat{s^2_{y^{(\hat{\lambda})}}}$ é a variância amostral de $y^{(\hat{\lambda})}$. O modelo que apresenta menores valores de EQM e/ou EPAM produz a característica desejável de possuir menores erros de ajustes.

Os resíduos de Pearson definidos em Cordeiro e Andrade (2009) para os modelos simétricos transformados são dados por

$$r_i = \frac{y_i^{(\hat{\lambda})} - \hat{\eta}_i}{\sqrt{k_2 \hat{\phi}}} \tag{2.17}$$

em que $k_2 = -2\psi'(0)$, sendo $\psi(\cdot)$ é a parte real da função característica da distribuição. No caso da distribuição logística II, por exemplo, $k_2 = \frac{\pi^2}{3}$. Tem-se ainda que $\hat{\phi} = \hat{\tau}^{-1}$.

2.11 Inferência Bayesiana

Na inferência clássica, também denominada método frequentista, os parâmetros, uma vez estimados da amostra, tornam-se valores fixos, dos quais se exprimem todo conhecimento estatístico a cerca da população.

A inferência Bayesiana, no entanto, trata o problema da estimação de parâmetros por uma abordagem diferenciada. A amostra, para a inferência Bayesiana, é um dos componentes da estimação, representada pela função de verossimilhança. A outra parte, designada distribuição a priori, representa a informação subjetiva do especialista/pesquisador a cerca do parâmetro ou problema em questão. Essa informação se baseia portanto, na experiência do especialista com problemas similares (anteriores) ao tratado. Neste sentido, em inferência Bayesiana, os parâmetros são tratados como quantidades aleatórias, conforme Figura 10, que têm uma maior ou menor probabilidade de serem um ou outro valor, em oposição à interpretação clássica de um valor fixo para a estimativa (BOX e TIAO,

1973).

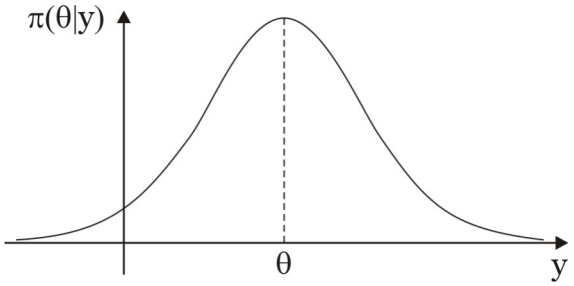

Figura 10: Distribuição hipotética de um parâmetro θ

Seja uma quantidade desconhecida $\underline{\theta}$ de interesse. Suponha $f(\underline{x}|\underline{\theta})$ uma função dos dados gerada por lei de probabilidade de $X = x$ condicionada à $\underline{\theta}$ e $\pi(\underline{\theta})$ uma distribuição a priori obtida de um especialista, a distribuição a posteriori é obtida por

$$\pi(\underline{\theta}|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\underline{\theta})\pi(\underline{\theta})}{\int_{\Theta} f(\underline{x}|\underline{\theta})\pi(\underline{\theta})d\underline{\theta}}. \tag{2.18}$$

A Expressão (2.18) é a conhecida Regra de Bayes. Frequentemente, o denominador é suprimido, pois pode sempre ser recuperados integrando $f(\underline{x}|\underline{\theta})\pi(\underline{\theta})$, sob o domínio Θ. Quanto $\underline{\theta}$ é um vetor paramétrico, o denominador assume a forma de uma integral múltipla sob o domínio de $\underline{\theta} \in \Theta$. Desta forma, torna-se difícil, ou comumente impossível, a obtenção analítica para a distribuição a posteriori. Nesses casos, recorre-se a métodos alternativos como a aproximação analítica de Laplace ou intensivos como o algoritmo de Metropolis-Hastings. Paulino et al (1999) fornece descrição desses e de outros métodos.

Em inferência Bayesiana, toda informação necessária à realização de inferências é extraída da própria distribuição a posteriori. Assim, intervalos de confiança constituem uma das principais divergências entre o paradigma clássico e o Bayesiano. De posse de intervalos de confiança clássicos se pode apenas afirmar que, ao nível de significância γ, quando o experimento é repetido um número grande de vezes, espera-se que $100(1-\gamma)$ contenham certa estatística. Já o intervalo de confiança Bayesiano (intervalo de credibilidade) deriva diretamente dos axiomas de probabilidade. Assim, ao nível de significância γ, pode-se afirmar que o parâmetro tem a probabilidade $1-\gamma$ de estar no intervalo de credibilidade, dispensando a necessidade de repetição do experimento (BOX e TIAO , 1973).

Tendo em vista que os resultados em inferência Bayesiana derivam de distribuições, é útil obter quatro quantidades a posteriori:

média valor central a partir do qual a distribuição se dispersa;

desvio padrão valor que indica o quanto varia a distribuição em torno da média;

assimetria o grau pelo qual a distribuição se acumula apenas em um lado da média;

curtose o quanto valores atípicos se afastam da média.

Paulino et al, (2003) consideram a análise de modelos lineares e análise de variância sob o enfoque Bayesiano, por outro lado Dey et al (2000) reúnem, em um compêndio, vários artigos que que estendem o problema para os MLG´s. Box e Tiao (1973) tratam do problema da estimação de λ, da distribuição à priori e à posteriori para os modelos simétricos.

Seja o modelo transformado simples 2.8 de Box e Cox e admita $Y_i^{(\lambda)} \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a fdp para os dados não transformados é expressa por

$$\pi(\underline{y}|\lambda, \underline{\theta}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{(\underline{y}^{(\lambda)} - \underline{X}\,\underline{\theta})'(\underline{y}^{(\lambda)} - \underline{X}\,\underline{\theta})}{2\sigma^2}\right] J(\lambda; \underline{y}), \quad \underline{y}^{(\lambda)} \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

em que $J(\lambda; \underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} \left|\frac{dy_i^{(\lambda)}}{dy_i}\right|$ é o respectivo Jacobiano. Demonstra-se que a distribuição à posteriori conjunta é

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\theta}, \log(\sigma), \lambda|\underline{y}) \quad &\propto \quad \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{S_\lambda + (\underline{\theta} - \underline{\hat{\theta}_\lambda})'\underline{X}'\underline{X}(\underline{\theta} - \underline{\hat{\theta}_\lambda})}{2\sigma^2}\right] \times \\ &\quad J(\lambda; \underline{y})\pi(\underline{\theta}, \log(\sigma), \lambda), \qquad (2.20) \\ &\qquad (2.21) \end{aligned}$$

em que $\log(\sigma),\ \underline{\theta},\ \lambda \in \mathbb{R}$, $S_\lambda = (\underline{y}^{(\lambda)} - \underline{X}\,\underline{\hat{\theta}_\lambda})'(\underline{y}^{(\lambda)} - \underline{X}\,\underline{\hat{\theta}_\lambda})$ com $\underline{\hat{\theta}}_\lambda = (\underline{X}'\underline{X})^{-}\underline{X}'\underline{y}^{(\lambda)}$ e $\pi(\underline{\theta}, \log(\sigma), \lambda) \propto J_\lambda^{-k/n}\pi(\lambda)$ é a função de densidade a priori (BOX e TIAO, 1973).

Pericchi (1981) considera uma priori não-informativa alternativa

$$\tilde{\pi}(\underline{\theta}, \sigma, \lambda) = p(\lambda)/(\sigma^{k+1}), \quad (2.22)$$

obtendo-se a posteriori (2.23) do produto entre a verossimilhança obtida de (2.4) e a priori (2.22)

$$\tilde{\pi}(\underline{\theta}, \sigma, \lambda|\underline{y}) \propto \sigma^{-n-k-1} \exp\left\{-\frac{[S_\lambda + (\underline{\theta} - \underline{\hat{\theta}_\lambda})\underline{X}'\underline{X}(\underline{\theta} - \underline{\hat{\theta}_\lambda})]}{(2\sigma^2)}\right\} J_\lambda \pi(\lambda) \quad (2.23)$$

A partir destes resultados é possível construir a região de credibilidade para os parâ-

metros, em particular λ o parâmetro da transformação.

Para um λ fixo, o valor máximo da log-verossimilhança, exceto para uma constante comum à todos os λ, é igual a

$$L_{\max}^{\lambda} = -\frac{1}{2} n \log \left\{ S_\lambda / (n J_\lambda^{2/n}) \right\} \tag{2.24}$$

A estimativa $\hat{\lambda}$ será obtida pela maximização de $L_{\max}^{\lambda}$.

Considerando $p(\lambda)$ uniforme sobre Λ, o intervalo de variação de λ, e integrando (2.21) e (2.23) com respeito a $\underline{\theta}$ dado σ, exceto para constantes independentes de λ e $\underline{Y}$, e tomando os logaritmos obtém-se, respectivamente:

$$L_b(\lambda) = -\frac{1}{2}(n-k) \log \left\{ S_\lambda / [(n-k) J_\lambda^{2/n}] \right\} \tag{2.25}$$

e

$$\tilde{L}_b(\lambda) = -\frac{1}{2} n \log \left\{ S_\lambda / (n J_\lambda^{2/n}) \right\} \tag{2.26}$$

De (2.25) e (2.26) se pode notar que a estatística de verossimilhança e Bayesiana que maximizam λ são equivalentes quando a priori alternativa de Pericchi (2.22) é utilizada.

2.11.1 Simulação de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC)

Em muitos problemas envolvendo métodos Bayesianos pode ser bastante complexo, ou mesmo impossível, encontrar, de forma explícita, uma distribuição a posteriori de interesse. Os métodos analíticos mais utilizados (quando possível), afim de superar o problema, são a aproximação à distribuição normal multivariada e o método de Lapace. Pode-se utilizar, alternativamente, métodos numéricos não intensivos como a quadratura iterativa, que utiliza os polinômios de Hermite, e o método de Monte Carlo simples.

Os Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) constituem uma alternativa aos métodos acima em problemas complexos. A técnica de simulação MCMC utiliza a noção de amostrar valores da distribuição a posteriori de interesse e calcular estimativas amostrais de características dessa distribuição. A diferença, em relação aos outro métodos numéricos, é que nas técnicas de simulação iterativas, baseadas em cadeias de Markov, os valores gerados não serão mais independentes (EHLERS, 2004).

2.11.2 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um processo estocástico $X_0, X_1, ...$ tal que a distribuição de X_t depende apenas de X_{t-1}. Assim, tem-se

$$P(X_t = x|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}) = P(X_t = x|X_{t-1} = x_{t-1}).$$

Seja a probabilidade de transição do estado i para o estado j em $n \in \mathbb{N}$ iterações $p_{ij}^{(n)} \equiv P(X_t = j|X_{t-1} = i)$. Seja, ainda, o período $d(i)$ de um estado i definido como, isto é, o retorno da cadeia ao estado i ocorre em múltipos de $d(i)$ vezes. Matematicamente, o período $d(i)$ é definido como

$$d(i) = mdc\{t : P(X_t = i|X_0 = i) > 0\}$$

em que mdc é o máximo divisor comum. Se, por exemplo, para $t = 20$ os retornos ao estado inicial ocorrem nas iterações em $5, 10, 15, 20$, então o período $d(i) = 5$.

Os métodos de simulação MCMC exigem que a cadeia de Markov atendas as seguintes propriedades (EHLERS, 2004),

homogênea as probabilidades de transição entre estados não se modificam (invariantes), matematicamente,

$$P(X_{t+1} = x|X_t = y) = P(X_t = x|X_{t-1} = y).$$

irredutível a transição entre estados é atingida por um número finito de iterações, ou seja,

$$\exists\, n, m : p_{ij}^{(n)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0.$$

aperiódica uma vez atingido o estado X_i o sistema não pode permanecer indefinidamente nele (não haja estados absorventes), isto é, o período $d(i) = 1$, o que significa que o retorno ao estado i ocorre em um número irregular de vezes.

Suponha que uma distribuição $\pi(\underline{\theta}),\ \underline{\theta} \in \mathbb{R}^d$ seja conhecida a menos de uma constante multiplicativa porém complexa o bastante para não ser possível obter uma amostra diretamente. Dadas as realizações $X_t, t = 0, 1, ...$ de uma cadeia de Markov que tenha $\pi(\underline{\theta})$ como distribuição de equilíbrio então, sob as condições acima,

$$X_t \xrightarrow{q.c.} \pi(\underline{\theta}) \quad \text{e} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\underline{\theta}_i^{(t)}) \xrightarrow{q.c.} E_\pi[g(\underline{\theta})]$$

Ou seja, embora a cadeia seja por definição dependente, a média aritmética dos valores da cadeia é um estimador consistente da média teórica.

Teorema 1. *Se uma Cadeia de Markov é homogênea, irredutível e aperiódica, então as probabilidades* $\pi_j = \lim_{j\to\infty} \pi_j^{(t)}$ *existem e independem das probabilidades iniciais* $\{\pi_j^{(0)}\}$ *(GILKS, 1996).*

Pelo Teorema 1, a distribuição $\pi(\underline{\theta}^{(t)})$ de um algoritmo MCMC se aproxima, com o aumento das iterações, da distribuição $\pi(\underline{\theta})$, independente da escolha de distribuição inicial $\pi(\underline{\theta}^{(0)})$. Esta propriedade é chamada ergodicidade, e a distribuição invariante é chamada distribuição de equilíbrio. Em aplicações, é comum descartar a fase inicial, como se fossem uma amostra de aquecimento ou burn-in (NTZOUFRAS, 2009).

2.11.3 Algoritmo de Metropolis-Hastings

O algoritmo de Metropolis-Hastings é um tipo de cadeia de Markov empregado em Matemática, Física e Estatística para obter uma sequência de valores que convergem para uma distribuição de equilíbrio, $f(\underline{x}|\cdot)$. Foi desenvolvido por Metropolis e associados na década de 1950 (METROPOLIS et al, 1953).

Na década de 1970, Hastings entre outros generalizaram o procedimento (CHIB e GREENBERG, 1995). Geman e Geman (1984) desenvolveram o amostrador de Gibbs. Só depois de 35 anos da criação do algoritmo, os pesquisadores Bayesianos redescobriram o algoritmo e então passou a ser a principal ferramenta computacional em inferência estatística (NTZOUFRAS, 2009). Devido a alta flexibilidade e generalidade, o algoritmo de Metropolis-Hastings se torna, particularmente, interessante quando, a amostragem direta da distribuição de probabilidade é complexa ou quando não possui forma analítica fechada como é típico em inferência Bayesiana (EHLERS, 2004).

Termos comuns em MCMC são:

cadeia série temporal obtida na simulação de cada quantidade aleatória.

total de iterações número total de iterações (N) geradas pelo algoritmo MCMC para cada cadeia;

valores iniciais quantidades iniciais ($\underline{\theta}^{(0)}$) necessários para inicializar o algoritmo;

burn-in primeiras (B) iterações descartadas para eliminar a influência dos valores iniciais;

lag sequência de valores amostrados de N para diminuir as auto-correlações entre as iterações. Por exemplo, se numa simulação MCMC se obtém $N = 1000,\ B = 100$ e $lag = 5$ significa que as observações realmente analisadas serão $101, 106, 111, ..., 996$.

Existem muitas recomendações conflitantes, quanto à quantidade de iterações e ao número de cadeias a serem simuladas. Alguns autores recomendam amostrar muitas cadeias de tamanho pequeno (GELFAND e SMITH, 1990), outros trabalham com diversas cadeias longas (GELMAN e RUBIN, 1992) e outra vertente utiliza uma única cadeia muito longa (GEYER, 1992).

Quanto aos valores iniciais, pelo Teorema 1, a convergência não é afetada para N grande. Gelman e Rubin (1992), sugerem que, ao se utilizar a metodologia das múltiplas cadeias, os valores iniciais sejam escolhidos de forma dispersa (GILKS, 1996).

O método mais utilizado para determinar o tamanho do burn-in é a inspeção visual (GILKS, 1996). De fato, Geyer (1992) sugere que o cálculo do tamanho do burn-in é irrelevante e utiliza entre 1% e 2% do tamanho total da cadeia. Entretanto, existem diversos formas de obter o tamanho do burn-in de forma analítica (COWLES e CARLIN, 1996).

Existem diversas variações do algoritmo de Metropolis-Hastings. As mais comuns são “random-walk” Metropolis, “inpendence sampler”, “Componentwise” Metropolis-Hastings e amostrador de Gibbs (NTZOUFRAS, 2009).

O algoritmo “random-walk” Metropolis é descrito a seguir.

Seja $q(\underline{x}|\cdot)$ uma distribuição proposta para estimar $f(\underline{x}|\cdot)$, o algoritmo pode ser implementado da seguinte forma:

(i) especifique um valor inicial $\underline{\theta}^{(0)}$;

(ii) Para $i = 1, ..., T$

1. faça $\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(i-1)}$;

2. proponha um novo valor $\underline{\theta}'$ de $q(\underline{\theta})$;

3. calcule $A(\underline{\theta}, \underline{\theta}') = \min\left[\frac{f(\underline{x}|\underline{\theta}')\pi(\underline{\theta}')}{f(\underline{x}|\underline{\theta})\pi(\underline{\theta})}, 1\right]$;

4. simule um valor $u \sim U_c(0, 1)$;

5. faça

$$\underline{\theta} = \begin{cases} \underline{\theta}' & \text{se } A < u; \\ \underline{\theta}^{(i-1)} & \text{se } A > u. \end{cases}$$

(ii) repita os passos de 1 a 5 N vezes.

2.11.4 Diagnósticos Bayesianos

Os diagnósticos Bayesianos constituem uma forma de avaliação quantitativa da convergência das cadeias obtidas a partir da simulação de um algoritmo MCMC. Três dos principais critérios com esta finalidade são o diagnóstico de Geweke, o diagnóstico de Heidelberger e Welch e o critério de Raftery e Lewis (COWLES e CARLIN, 1996).

1. Diagnóstico de Geweke

   Este método se baseia em técnicas de séries temporais (PAULINO et al, 2003). Seja $g_a = \frac{1}{n_a}\sum_{i=1}^{n_a} g(\underline{\theta})$ a média das n_a primeiras iterações da cadeia e, de forma semelhante, $g_b = \frac{1}{n_b}\sum_{i=1}^{n_b} g(\underline{\theta}_i)$ a média das n_b últimas iterações, em que $g(\underline{\theta})$ é uma função dos parâmetros cuja esperança se quer estimar. Se a cadeia é estacionária, então g_a e g_b não devem diferir entre se e assim

   $$\frac{g_a - g_b}{\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}} \longrightarrow N(0,1) \tag{2.27}$$

   em que s_a^2 e s_b^2 são estimativas independentes das variâncias assintóticas de g_a e g_b.

   Este teste retorna valores padronizados z. Portanto é razoável encontrar valores tais que $-1,96 < z < 1,96$. No entanto, são requeridos valores de z estritamente menores que 1 para que seja aceitável a suposição de independência das estimativas de g_a e g_b (COWLES e CARLIN, 1996).

   A partir dos valores obtidos no teste (2.27) podem ser definidos resíduos Bayesianos que irão avaliar o afastamento de pontos específicos da cadeia.

2. Diagnóstico de Heidelberger e Welch

   Este teste utiliza a estatística de Cramer-von-Mises para testar a hipótese nula de que a amostra tomada para o teste siga uma distribuição estacionária. O teste é aplicado a toda a cadeia e depois aos 10%, 20%, ... primeiras iterações até que a hipótese nula seja aceita, ou até atingir 50% das iterações, quando o teste falha, caso em que não se pode dizer que houve estacionaridade na cadeia (COWLES e CARLIN, 1996).

3. Critério de Raftery e Lewis

   Este diagnóstico é bastante interessante, pois define quantidades mínimas que deveriam ser utilizadas para se atingir uma autocorrelação baixa para cada parâmetro. Define também, o fator de dependência I que se for maior que 5 sugere uma forte autocorrelação que pode vir de uma escolha fraca para os valores iniciais, alta correlação a posteriori no algoritmo MCMC (COWLES e CARLIN, 1996).

3 Material e Métodos

3.1 O Experimento

A Região do Araripe, localizada na Mesorregião do Sertão Pernambucano representa $18,8\%$ do território estadual com uma área de 1857,9 km^2 (PERNAMBUCO, 2009). As plantas utilizadas na pesquisa foram oriundas de um experimento que está sendo realizado na Estação Experimental do Instituto Agronômico de Pernambuco (IPA), localizada na Chapada do Araripe no município de Araripina, no Semi-árido de Pernambuco (Figura 11).

Figura 11: Aspecto paisagístico da chapada do Araripe

Possui como coordenadas geográficas de posição 07^{o}27'37"S e 40^{o}24'36"W e altitude de 831 metros. A precipitação média anual é de 650 mm, com concentração de 70$\%$ entre os meses de dezembro a março, provoncando deficiências hídricas ao longo do ano. O clima é do tipo Bshw'[1], registrando temperatura média anual de 24^{o}C. O solo é do tipo

[1]semi-árido quente e seco com chuvas de verão-outono, segundo classificação climática de Köppen-Geiger

latossolo vermelho-amarelo (ARAÚJO, 2004).

É apresentado na Figura 12 uma vista parcial do experimento intitulado *Módulo de Experimentação Florestal para a região do Araripe*, que foi implantado em março de 2002, em uma área de 2,352 ha.

Figura 12: Vistas interna e externa do experimento.

As parcelas contém 49 plantas, sendo que a área útil é composta de 25 plantas, contendo 15 clones, entre híbridos e espécies do gênero *Eucalyptus* plantadas no espaçamento 3$\times$2 m, perfazendo 21 metros de largura e 14 de comprimento num total de 294 m^2 de parcela. Na Figura 13 é possível visualizar um esquema da parcela experimental. Note a bordadura constituída das 24 árvores externas, representada na figura em amarelo e a parcela útil com suas 25 árvores, representada em verde.

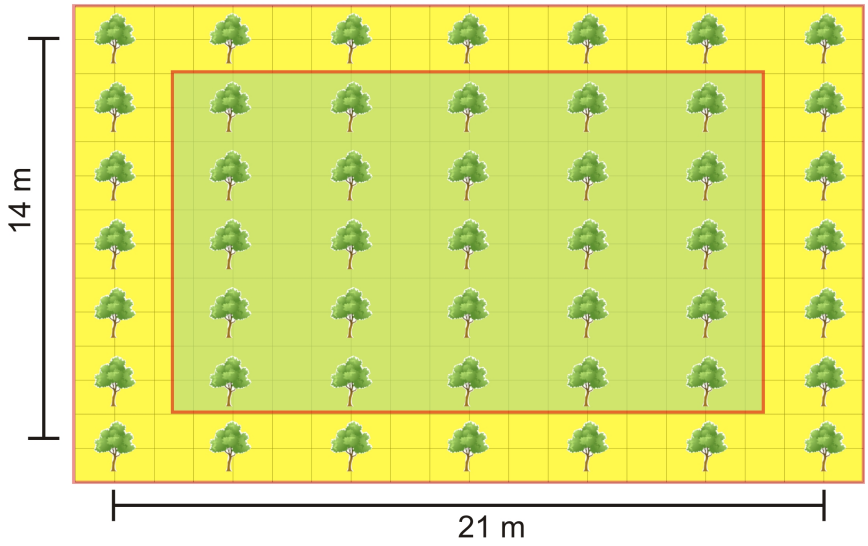

Figura 13: Planta baixa da parcela e área útil.

Os dados foram coletados aos dois meses e daí então a cada seis meses até serem completados 78 meses. Dentre as diversas variedades e cruzamentos plantados no instituto, selecionou-se o híbrido de *Eucalyptus urophylla* com cruzamento natural, o qual retornou 882 observações de altura de árvores homogêneas provenientes de experimento inteiramente ao acaso.

3.2 Modelagem

Seja $\underline{\beta} = (\underline{\varphi}, \tau)'$, em que $\underline{\varphi} = (\alpha, \beta, \kappa, \delta, \theta, \lambda)$ é o vetor de parâmetros do preditor não linear definido pelo modelo de Chapman-Richards

$$\eta_i = \alpha\{1 - \beta \exp[-\kappa(x_i - \delta)]\}^{-\theta}, \tag{3.1}$$

com $\theta = \frac{1}{1-\gamma}$ e $\tau = \phi^{-1}$ é o parâmetro de precisão dos modelos simétricos transformados. Note que este é o modelo de Chapman-Richards supondo $\beta = 1$ e $\delta = 0$.

A função de verossimilhança (3.2) para os modelos simétricos transformados seguindo a equação (2.4) pode ser escrita como:

$$L(\underline{\varphi}, \phi \,|\, y_i^{(\lambda)}) = \phi^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} h\left[\left(\frac{y_i^{(\lambda)} - \eta_i}{\phi}\right)^2\right] \,|\, y_i \,|^{\,\lambda-1}, \tag{3.2}$$

em que η_i é o preditor não linear (3.1) e $y_i^{(\lambda)}$ é a transformação (2.8) de Box-Cox. Observe que estas duas quantidades se comportam como uma espécie de resíduo ordinário, que deve ser mínimo se o preditor não linear se ajustar bem aos dados transformados.

Foram utilizadas distribuições a priori para $\underline{\varphi}$ e τ nas formas

$$\underline{\varphi} \sim N(\hat{\underline{\varphi}}, \hat{\phi}) \tag{3.3}$$

e

$$\tau \propto \hat{\phi}^{-1}, \tag{3.4}$$

em que $\hat{\underline{\varphi}}$ e $\hat{\phi}$ são as estimativas de máxima verossimilhança para $\underline{\varphi}$ e ϕ, respectivamente.

A partir das observações das alturas medidas entre 2 e 78 meses de vida das árvores (num total de 14 medidas ao longo do tempo), aplicou-se os modelos simétricos transformados via logaritmo da função (3.2) e se obteve estimavas clássicas para o vetor de parâmetros $\underline{\beta} = (\underline{\varphi}, \tau)'$, em que $\underline{\varphi} = (\alpha, \beta, \kappa, \delta, \theta, \lambda)$ e $\tau = \phi^{-1}$, via método de máxima

verossimilhança supondo diversas distribuições simétricas. O código, semelhante ao encontrado em Lima-Filho (2009), foi executado no software SAS 9.01. Os graus de liberdade da distribuição t de Student foram estimados por verossimilhança perfilada.

Para encontrar as estimativas Bayesianas, utilizou-se a função (3.2) com densidade a priori do tipo (3.3) e (3.4) para obter a posteriori (3.5) pela regra de Bayes (2.18)

$$\pi(\underline{\varphi}, \tau \mid y_i^{(\lambda)}) \propto \quad \phi^{-\frac{n+2}{2}} \prod_{i=1}^{n} h \left[\left(\frac{y_i^{(\lambda)} - \eta_i}{\phi} \right)^2 \right] |y_i^{\lambda-1}| \times \exp\left(-\frac{\psi}{2\phi} \right), \tag{3.5}$$

em que $\psi = 5x_i^2 - 2x_i(\alpha + \kappa + \delta + \theta + \lambda) + \alpha^2 + \kappa^2 + \delta^2 + \theta^2 + \lambda^2$. Utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings , descrito anteriormente, no software R 2.10.1 (VENABLES, 2008) e com valores iniciais dados pelo método de máxima verossimilhança para o vetor $\underline{\beta}$, foi possível encontrar, numericamente, as densidades condicionais a posteriori de cada parâmetro (cadeias) e realiza-se as inferências do modelo obtido. O algoritmo de Metropolis-Hastings foi escolhido por ser de fácil implementação, enquanto o algoritmo amostrador de Gibbs requer distribuições condicionais a posteriori, que neste caso não são de fácil determinação. Embora o software WinBugs, até o momento na versão 1.4.3, pudesse ser utilizado com o intuito de contornar esse problema, não surtiria resultado, pois a transformação de Box-Cox não pode ser implementada, já que a função step() que substitui a função lógica "se", só se aplica a intervalos. Para a realização dos diagnósticos Bayesianos foi utilizado o pacote coda versão 0.13-3. Esse pacote provê uma série de diagnósticos, dentre os quais os de Raftery-Lewis, Heidelberger-Welch e Geweke abordados na seção 2.11.4, além de fornecer ferramentas de diagnóstico gráfico como autocorrelogramas, gráfico de densidades a posteriori, traço ou série temporal, entre outros.

4 Resultados e Discussão

4.1 Abordagem Clássica

Inicialmente, foi realizada uma análise descritiva dos dados com a intenção de compreender a tendência da variável resposta (altura dos eucaliptos) do modelo. Dentre as 882 observações, a altura mínima medida foi $22\,cm$ e a máxima $19\,m$. A média das alturas na primeira medição foi $0,54 \pm 0,36\,m$, enquanto que a média da última aferição é $16,0 \pm 3,1m$. A partir dos dados é possível notar, ainda, que os coeficientes de variação aumentam ao longo dos meses (Tabela 4) e depois se estabilizam próximo ao valor 1100. Esse comportamento heteroscedástico é comum em manejo florestal. O box-plot[1] dos dados revela grande concentração na primeira classe e várias observações discrepantes dos 12 aos 72 meses (Figura 14).

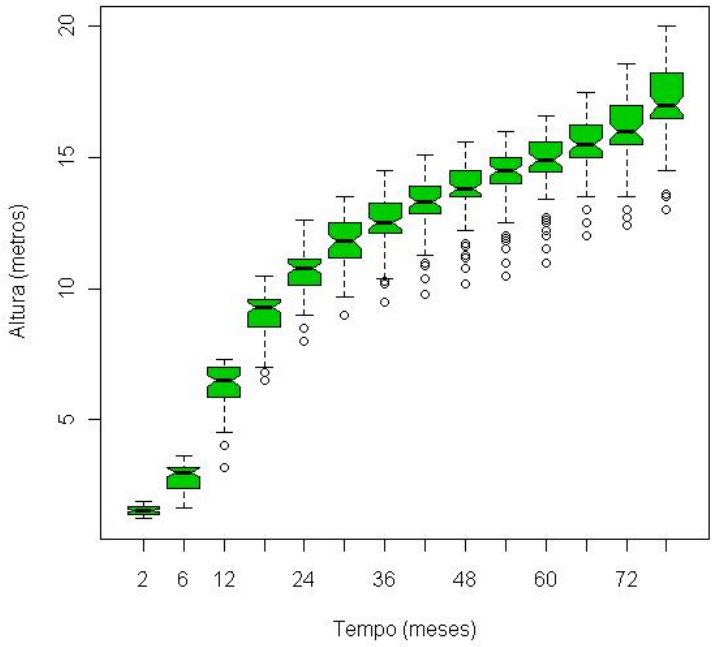

Figura 14: Box-plot dos dados.

[1] Gráfico que resume estatísticas importantes, como mediana, quartis e outliers.

Na Tabela 4 é possível observar algumas estatísticas descritivas, entre elas a média ($\bar{x}$), o desvio padrão (s), o coeficiente de variação ($100 * \bar{x}/s$), a assimetria

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{\sigma^2})^3},$$

em que $m_3 = \sum_{i=1}^{n}(y - \bar{y})^3/n$ é o terceiro momento central e a curtose (2.5) das alturas em estudo, segundo cada medição.

Tabela 4: Estatísticas descritivas das alturas dos *Eucalyptus*.

Média	D.P.	C.V.	Assimetria	Curtose
0.549	0.181	303	0.107	-1.017
1.825	0.505	362	-0.374	-0.917
5.268	0.907	581	-1.073	0.811
7.921	0.881	899	-1.025	0.174
9.673	0.98	988	-0.600	0.477
10.789	1.017	1061	-0.507	-0.154
11.562	1.082	1069	-0.743	0.275
12.179	1.112	1095	-0.831	0.695
12.671	1.133	1118	-0.952	0.892
13.183	1.224	1077	-0.933	0.747
13.778	1.233	1117	-1.041	0.856
14.357	1.321	1087	-0.660	0.082
15.078	1.352	1115	-0.690	0.343
16.043	1.504	1067	-0.652	0.226

Após aplicação do algoritmo de máxima verossimilhança para o modelo não transformado e várias distribuições, variando os graus de liberdade ν, no caso da distribuição t de Student. Obteve-se o gráfico da log-verossimilhança perfilada para o modelo simétrico não transformado com erros seguindo distribuição t de Student mostrado na Figura 15 atinge o máximo quando $\hat{\nu}$ é 3. Portanto, este é o valor de ν que minimiza o AIC e BIC supondo que o modelo correto seja este. Fixou-se, então, $\hat{\nu} = 3$ na estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança. Os demais parâmetros foram estimados livremente para cada distribuição.

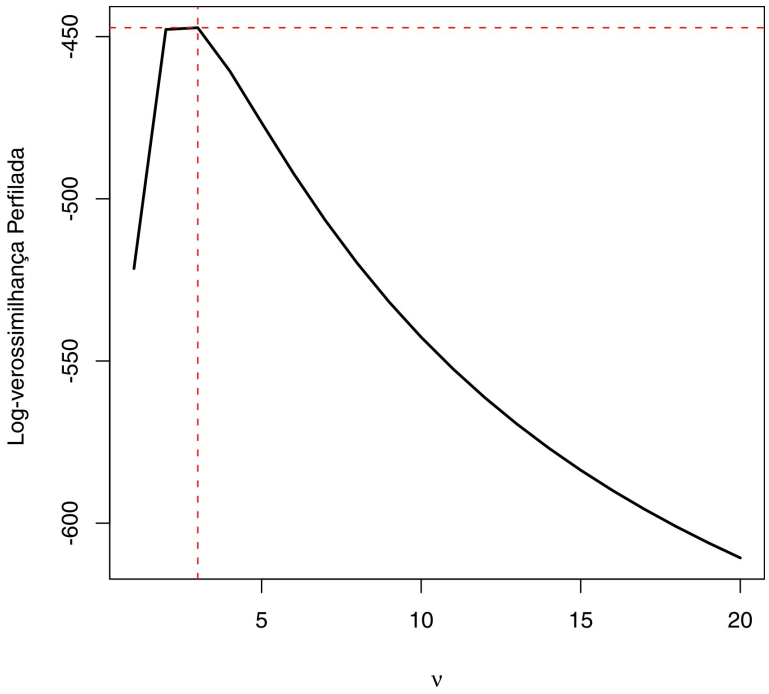

Figura 15: Log-verossimilhança perfilada para o modelo simétrico t de Student.

As estimativas de $\boldsymbol{\beta}$, com $\lambda = 1$ e correspondentes erros padrões e intervalo de 95% confiança são apresentados na Tabela 5. Houve problema na convergência da estimativa de κ do modelo simétrico com distribuição de Laplace, não obtendo valor para $\kappa^{\kappa,\kappa}$ na matriz de variâncias-covariâncias e, consequentemente, seus valores derivados (erro padrão e intervalo de confiança). Todas as demais estimativas dos modelos foram significativas.

Tabela 5: Estimativas clássicas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas.

Distribuição	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Intervalo de Confiança
normal	α	15,7933	0,1925	(15,4160, 16,1705)
	κ	0,0410	0,0022	(0,0366, 0,0453)
	θ	-1,1777	0,0496	(-1,2748, -1,0805)
	ϕ	1,4080	0,0670	(1,2766, 1,5394)
Cauchy	α	15,1111	0,1442	(14,8284, 15,3938)
	κ	0,0514	0,0020	(0,0475, 0,0553)
	θ	-1,3827	0,0430	(-1,4670, -1,2984)
	ϕ	0,3749	0,0334	(0,3095, 0,4404)
Laplace	α	15,1010	0,0020	(15,0970, 15,1040)
	κ	0,0520	$*$	$*$
	θ	-1,3830	0,0580	(-1,4980, -1,2690)
	ϕ	0,4100	0,0190	(0,3730, 0,4470)
Logística tipo I	α	16,3535	0,2633	(15,8370, 16,8700)
	κ	0,0335	0,0023	(0,0290, 0,0380)
	θ	-1,0292	0,0475	(-1,1220, -0,9360)
	ϕ	1,9397	0,0794	(1,7840, 2,0950)
Logística tipo II	α	15,6219	0,1718	(15,2850, 15,9590)
	κ	0,0441	0,0021	(0,0400, 0,0480)
	θ	-1,2424	0,0481	(-1,3370, -1,1480)
	ϕ	0,4161	0,0236	(0,3700, 0,4620)
t de Student ($\nu = 3$)	α	15,4681	0,1582	(15,1580, 15,7780)
	κ	0,0466	0,0021	(0,0430, 0,0510)
	θ	-1,2904	0,0467	(-1,3820, -1,1990)
	ϕ	0,7225	0,0481	(0,6280, 0,8170)

$*$ - Valor não obtido por software

Os graus de liberdade da distribuição t de Student, utilizando transformação de Box-Cox, foram estimados por verossimilhança perfilada. Verificou-se que no gráfico da log-verossimilhança perfilada, representado na Figura 16, o valor máximo foi atingido para $\hat{\nu} = 5$. Outra vez, fixou-se o valor de ν na estimação via máxima verossimilhança.

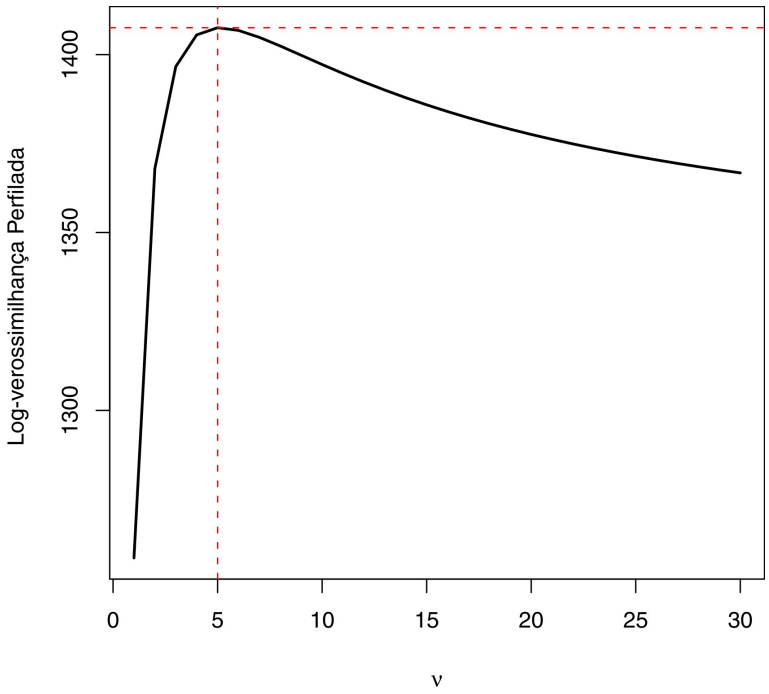

Figura 16: Log-verossimilhança perfilada para o modelo simétrico transformado t de Student.

Ao variar os valores de ν e relancioná-los aos respectivos valores da log-verossimilhança, considerando as estimativas de $\underline{\beta}$ fixas e iguais as obtidas pelo método de máxima verossimilhança, obteve-se a Figura 16. Observe que os valores obtidos para os graus de liberdade foram baixos, afastando-se da aproximação pela normal. Isto se deve por conta da presença de grande quantidade de valores extremos.

Na Tabela 6 estão anotadas as estimativas de $\underline{\beta}$ com correspondentes erros padrões e intervalo de 95% confiança. Também houve problemas com a convergência das estimativas do modelo simétrico com distribuição de Laplace, não obtendo valores para $\kappa^{\alpha,\alpha}$, $\kappa^{\kappa,\kappa}$ e $\kappa^{\theta,\theta}$ na matriz de variâncias-covariâncias. Todas as demais estimativas dos modelos apresentados foram significativas.

Tabela 6: Estimativas clássicas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas e transformação de Box-Cox.

Distribuição	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Intervalo de Confiança
normal	α	9,1446	0,5748	(8,0179, 10,2712)
	κ	0,0603	0,0034	(0,0536, 0,0669)
	θ	-1,6421	0,0796	(-1,7982, -1,4861)
	λ	0,7730	0,0322	(0,7098, 0,8361)
	ϕ	0,5614	0,0797	(0,4053, 0,7176)
Cauchy	α	12,1146	1,0996	(9,9595, 14,2698)
	κ	0,0625	0,0031	(0,0565, 0,0685)
	θ	-1,8529	0,0839	(-2,0174, -1,6884)
	λ	0,9325	0,0468	(0,8408, 1,0243)
	ϕ	0,3798	0,0785	(0,2258, 0,5337)
Laplace	α	4,5612	$*$	$*$
	κ	1,4587	$*$	$*$
	θ	0,6263	$*$	$*$
	λ	0,4675	0,0298	(0,4091, 0,5259)
	ϕ	1,5127	0,1654	(1,1885, 1,8370)
Logística tipo I	α	8,6689	0,4773	(7,7335, 9,6043)
	κ	0,0575	0,0035	(0,0507, 0,0642)
	θ	-1,5552	0,0784	(-1,7088, -1,4016)
	λ	0,7415	0,0276	(0,6874, 0,7956)
	ϕ	0,6525	0,0778	(0,5000, 0,8050)
Logística tipo II	α	10,0019	0,6969	(8,6358, 11,3679)
	κ	0,0601	0,0033	(0,0537, 0,0665)
	θ	-1,6794	0,0786	(-1,8335, -1,5253)
	λ	0,8216	0,0356	(0,7518, 0,8913)
	ϕ	0,2184	0,0341	(0,1516, 0,2853)
t de Student ($\nu = 5$)	α	3,1453	0,1996	(2,7541, 3,5365)
	κ	0,0779	0,0030	(0,0721, 0,0837)
	θ	-0,9798	0,0280	(-1,0347, -0,9248)
	λ	0,1012	0,0434	(0,0162, 0,1862)
	ϕ	0,0151	0,0029	(0,0094, 0,0207)

$*$ - Valor não obtido por software

4.2 Aplicação pelo Algoritmo de Metropolis-Hastings

A partir do algoritmo de Metropolis-Hastings e das estimativas fornecidas nas Tabelas 5 e 6, construiu-se uma cadeia com 10^6 iterações para cada parâmetro simulado com uma distribuição específica e uso de transformação ou não, sendo descartadas as $5 \cdot 10^5$

primeiras iterações de cada uma das quantidades aleatórias. Utilizou-se ainda lag de 20 iterações em cada cadeia. Assim, dispôs-se de 25000 amostras de cada parâmetros. Todas estimativas tiveram nível de aceitação do algoritmo de Metropolis-hastings $A(\underline{\beta}|\underline{\beta}')$ superior a 50%. Na Tabela 7, encontram-se as estimativas Bayesianas para a média e desvio padrão a posteriori, assimetria, curtose e intervalo de credibilidade de 95% simuladas de cada parâmetro, com a resposta seguindo as distribuições simétrica: Cauchy, Laplace, logística tipo I e II, normal e t de Student com 3 graus de liberdade, para o preditor não-linear (2.9) seguindo a equação (2.2) sem o uso da transformação de Box-Cox ($\lambda = 1$).

Tabela 7: Estimativas Bayesianas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas sem uso de transformação.

Distribuição	Par.	Média	D. Padrão	Assimetria	Curtose	I. Cred.
normal	α	15,7097	0,3480	-0,3610	1,4047	(15,0738, 16,4037)
	κ	0,0403	0,0042	0,2300	0,0964	(0,0330, 0,0498)
	θ	-1,1820	0,0765	-0,8059	0,3505	(-1,3600, -1,0592)
	τ	0,6605	0,4066	0,2137	-1,2726	(0,0478, 1,3655)
Cauchy	α	15,0184	0,3301	0,3244	0,9757	(14,3214, 15,7293)
	κ	0,0513	0,0032	-0,4801	0,3186	(0,0433, 0,0559)
	θ	-1,3910	0,0654	-0,0703	0,1817	(-1,5043, -1,2769)
	τ	3,0623	1,3848	-0,6405	-0,4550	(0,1660, 4,9206)
Laplace	α	15,1257	0,3229	-0,0115	-0,7781	(14,5675, 15,6513)
	κ	0,0510	0,0034	0,4044	0,3966	(0,0439, 0,0580)
	θ	-1,3904	0,0645	-0,0028	-0,2154	(-1,5151, -1,2639)
	τ	2,6855	1,4985	-0,3733	-1,0671	(0,0238, 4,7689)
Logística tipo I	α	16,2775	0,3108	0,1424	0,4432	(15,8527, 16,8571)
	κ	0,0321	0,0032	0,2198	-0,3486	(0,0273, 0,0382)
	θ	-1,0257	0,0608	0,0716	0,1213	(-1,1263, -0,9082)
	τ	0,6283	0,3389	-0,3722	-1,3026	(0,0200, 1,0117)
Logística tipo II	α	15,7112	0,3417	0,1135	-0,5657	(15,0877, 16,4458)
	κ	0,0412	0,0035	-0,1179	-0,8348	(0,0347, 0,0466)
	θ	-1,1809	0,0734	-0,1155	0,0855	(-1,3473, -1,0402)
	τ	0,6647	0,4257	0,0112	-1,0559	(0,0109, 1,3800)
t de Student (t_3)	α	15,4581	0,3639	-0,3031	-0,3335	(14,6998, 16,1294)
	κ	0,0462	0,0042	0,0488	-0,4334	(0,0398, 0,0546)
	θ	-1,2920	0,0757	-0,1688	0,4358	(-1,4280, -1,1507)
	τ	1,5289	0,8295	-0,2813	-1,0680	(0,1044, 2,7320)

Na Tabela 8, encontram-se as estatísticas Bayesianas: média, desvio padrão, assimetria, curtose e intervalo de credibilidade de 95$\%$, para o modelo de Chapman-Richards com distribuições simétricas usando a transformação de Box-Cox. É possível observar as mesmas medidas supondo a transformação (2.8). Para todos os modelos, as estimativas de λ sob $H_0 : \lambda = 1$ contra $H_1 : \lambda \neq 1$ são significativas ao nível de 95% de credibilidade.

Tabela 8: Estimativas Bayesianas dos parâmetros do modelo de crescimento Chapman-Richards com distribuições simétricas sem uso de transformação.

Distribuição	Par.	Média	D. Padrão	Assimetria	Curtose	I. Cred.
	α	3,5417	0,4088	-0,0863	-0,2813	(2,7606, 4,3270)
	κ	0,0756	0,0034	-0,0946	0,1313	(0,0685, 0,0822)
normal	θ	-1,0221	0,0717	0,0270	-0,1879	(-1,1601, -0,8766)
	λ	0,1620	0,0069	0,2101	0,4044	(0,1491, 0,1762)
	τ	19,4618	9,4937	-0,3130	-0,9457	(1,1693, 33,8916)
	α	2,6304	0,3902	0,0304	-0,4943	(1,9475, 3,3779)
	κ	0,0821	0,0033	-0,2328	0,5346	(0,0750, 0,0882)
Cauchy	θ	-0,8789	0,0690	0,0085	0,1043	(-1,0076, -0,7360)
	λ	-0,0319	0,0072	0,0454	-0,2072	(-0,0461, -0,0177)
	τ	131,1207	78,7857	0,0136	-1,2583	(6,1081, 261,3262)
	α	4,5967	0,3557	-0,4093	-0,7316	(3,8808, 5,1577)
	κ	1,0033	0,0032	0,1165	-0,8369	(0,9977, 1,0093)
Laplace	θ	0,9226	0,0585	0,1055	-0,8128	(0,8342, 1,0219)
	λ	0,4081	0,0087	0,5751	0,2904	(0,3910, 0,4245)
	τ	0,6222	0,3327	0,1793	-1,1949	(0,0970, 1,1565)
	α	3,6709	0,4033	-0,6249	0,8522	(2,8798, 4,3338)
	κ	0,0766	0,0030	-0,5870	-0,7686	(0,0713, 0,0800)
logística tipo I	θ	-1,0421	0,0714	0,2179	-0,0466	(-1,1726, -0,9062)
	λ	0,1726	0,0061	-0,3241	0,2144	(0,1593, 0,1840)
	τ	15,5705	7,7221	-0,4217	-1,3725	(1,3330, 23,9574)
	α	3,3434	0,3563	-0,1068	-0,1257	(2,7727, 3,8938)
	κ	0,0778	0,0030	-0,2531	-0,3600	(0,0710, 0,0828)
logística tipo II	θ	-0,9902	0,0624	0,5059	0,1892	(-1,0970, -0,8662)
	λ	0,1215	0,0057	-0,1307	-0,8501	(0,1114, 0,1309)
	τ	72,4954	44,6795	-0,3246	-1,2415	(1,6499, 133,2090)
	α	10,9384	0,3659	-0,2039	0,0893	(10,1708, 11,6569)
	κ	0,0610	0,0035	-0,0734	-0,5105	(0,0540, 0,0673)
t de Student (t_5)	θ	-1,7106	0,0684	-0,0695	0,1954	(-1,8511, -1,5742)
	λ	0,8658	0,0072	-0,1726	0,5813	(0,8507, 0,8809)
	τ	2,1733	1,7841	0,9099	0,1525	(0,0684, 6,2864)

Na Tabela 9 as siglas CNT, BNT, CT e BT significam, respectivamente, modelo clássico não transformado, Bayesiano não transformado, modelo clássico transformado e Bayesiano transformado. Pode-se ver que as estimativas Bayesianas para a distribuição t de Student com $\nu = 5$ e uso de transformação produz valor máximo para a log-verossimilhança e os menores valores de AIC, BIC e EQM, ajustando-se melhor, portanto, por estes quatro critérios. Note que as três melhores equações, segundo os critérios de AIC e BIC, são aquelas que possuem distribuição t de Student BT, CT e CNT. Seguindo, exclusivamente, o EPAM, a melhor equação seria a que possui transformação usando inferência Bayesiana e distribuição de Cauchy para a variável dependente.

Tabela 9: Comparação das estatísticas de seleção das equações e erros dos ajustes.

Distribuição	Modelo	$\hat{\ell}$	AIC	BIC	EPAM	EQM
normal	CNT	-1696,098	3402,196	3426,107	14,337	10,313
	BNT	-1764,354	3536,708	3555,837	15,252	11,637
	CT	-1412,484	2834,968	2858,879	7,282	5,883
	BT	-1359,474	2728,948	2752,858	8,102	4,477
Cauchy	CNT	-2518,936	5047,871	5071,782	14,950	10,224
	BNT	-2738,637	5485,274	5504,403	15,535	11,007
	CT	-1834,264	3678,527	3702,438	6,792	6,546
	BT	-1374,776	2759,552	2783,463	7,007	3,496
Laplace	CNT	-1946,389	3902,779	3926,690	14,902	10,186
	BNT	-2029,158	4066,317	4085,445	15,269	10,502
	CT	-3079,054	6168,108	6192,019	105,876	114,700
	BT	-2650,443	5310,886	5334,797	113,941	141,257
logística tipo I	CNT	-1743,354	3494,708	3513,837	14,019	11,131
	BNT	-2096,146	4200,292	4219,421	15,440	13,601
	CT	-1431,939	2873,877	2897,788	15,420	5,856
	BT	-1532,298	3074,595	3098,506	9,381	6,448
logística tipo II	CNT	-1694,845	3397,691	3416,819	14,338	10,313
	BNT	-1715,873	3439,746	3458,875	14,565	10,693
	CT	-1860,541	3731,083	3754,994	13,784	6,040
	BT	-1502,849	3039,610	3015,699	8,322	4,820
t de Student	CNT ($\nu = 3$)	-447,252	902,505	921,634	14,481	9,837
	BNT ($\nu = 3$)	-1793,054	3596,108	3620,019	14,806	10,224
	CT ($\nu = 5$)	1479,660	-2949,320	-2946,930	7,143	13,957
	BT ($\nu = 5$)	1491,963	-2973,926	-2950,015	9,921	3,252

Em que: CNT = modelo clássico não transformado, BNT = modelo Bayesiano não transformado, CT = modelo clássico transformado e BNT = modelo Bayesiano transformado.

Este resultado concorda com Lima-Filho (2009) e Santos (2010), que utilizando es-

trutura semelhante, sem inferência Bayesiana, optaram pelo modelo transformado com distribuição t de Student e 2 graus de liberdade.

Na Figura 17 são mostradas as densidades condicionais a posteriori do vetor de parâmetros $\underline{\beta}$ do modelo escolhido.

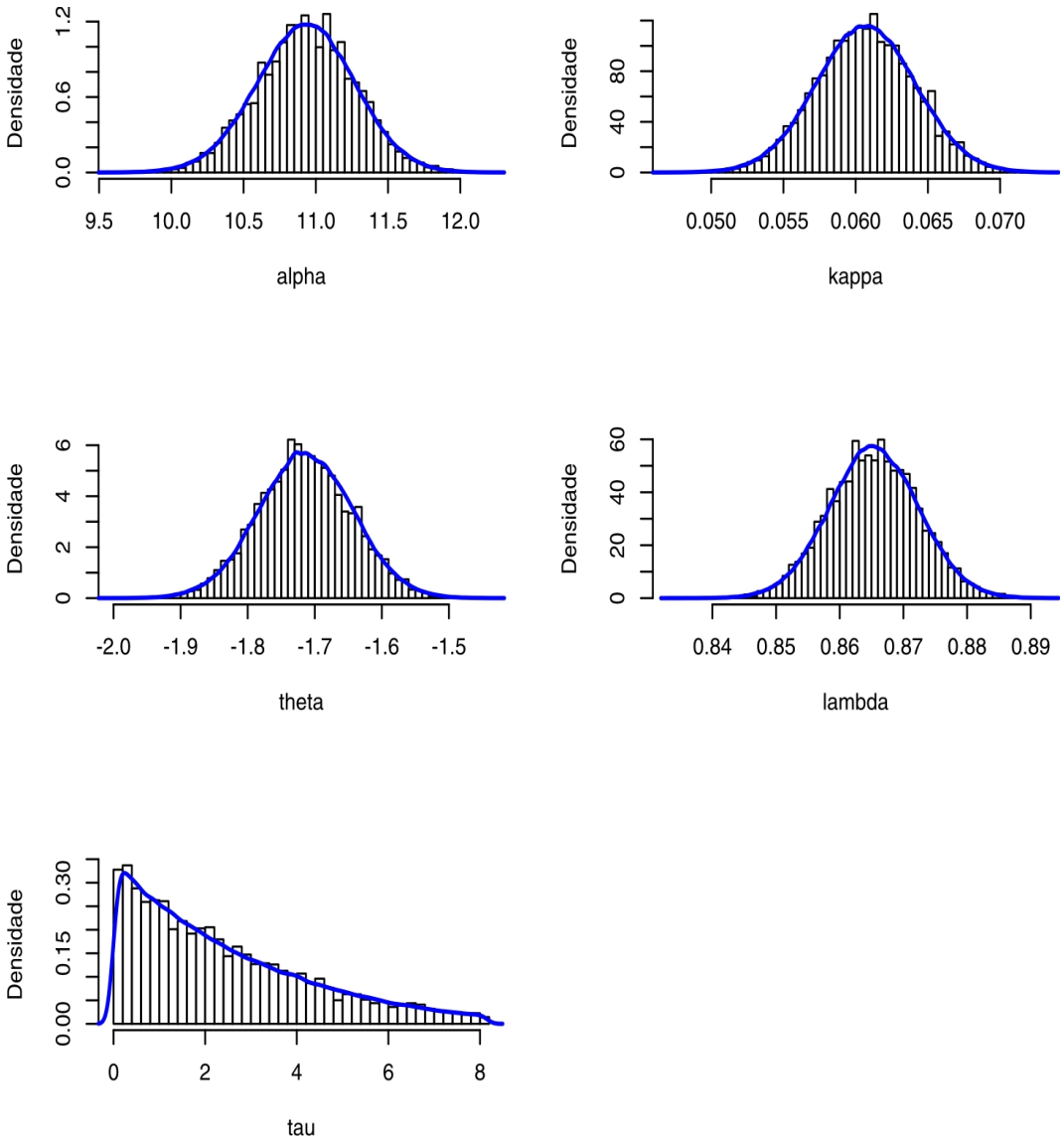

Figura 17: Histogramas das densidades a posteriori do modelo (2.2).

Nota-se que as densidades a posteriori continuam normalmente distribuídas entre os valores estimados de $\underline{\widehat{\varphi}}$. No caso de τ, tem-se uma distribuição assimétrica positiva, diferindo da distribuição a priori, que foi ajustada por uma distribuição uniforme.

Na Figura 18 se verifica a tendência estacionária das séries simuladas dos parâmetros, em torno das estimativas, para o modelo transformado com erros seguindo distribuição t de Student com 5 graus de liberdade.

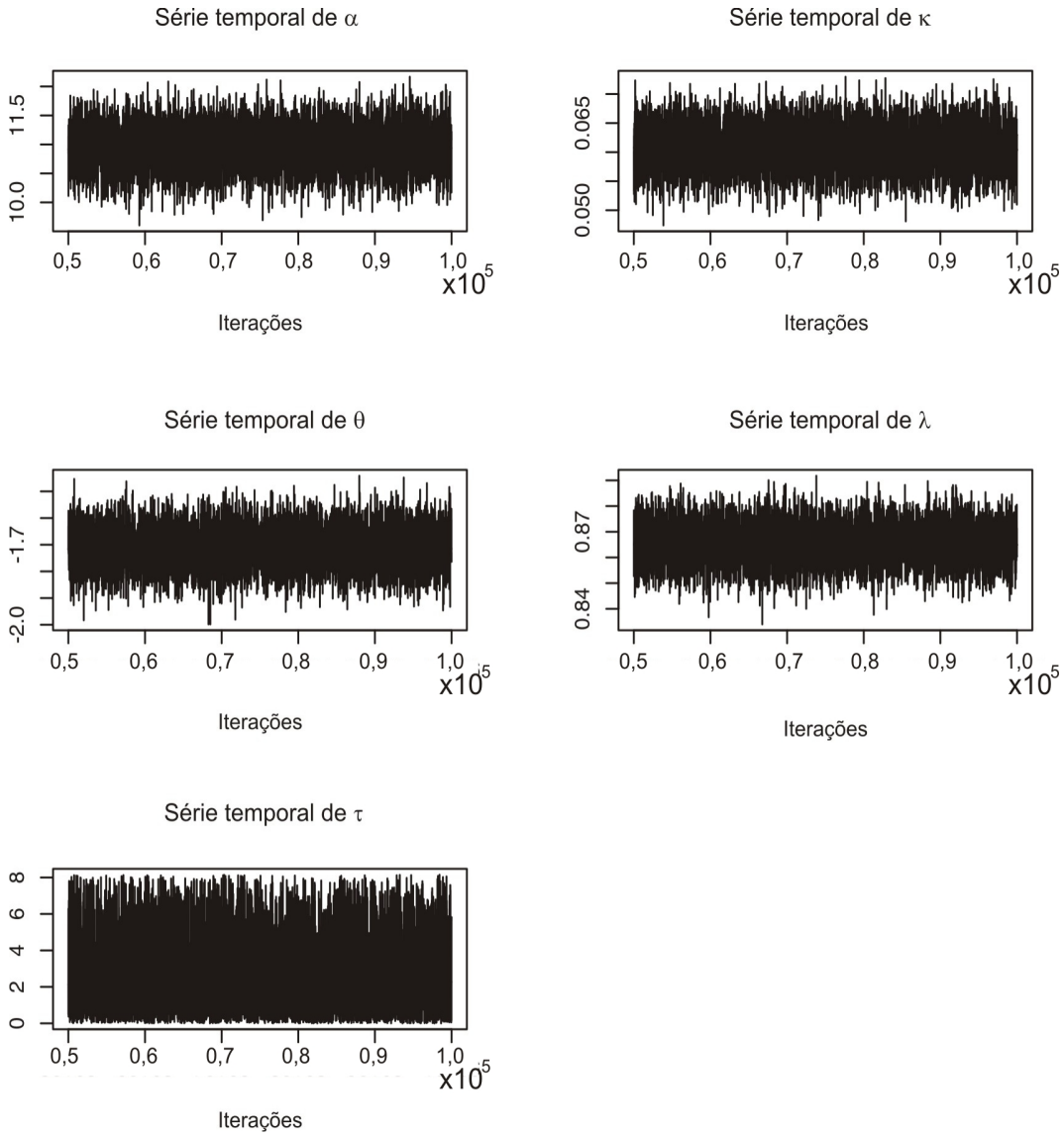

Figura 18: Séries temporais dos valores de α, κ, θ, λ e τ.

Note ainda que não há falhas, nem mudanças bruscas no comportamento das 10^6 iterações, o que sugere convergência das estimativas.

Na Figura 19 observamos autocorrelogramas, gráficos muito comuns em inferência Bayesiana para avaliar a convergência das estimativas. Autocorrelações que perduram ao longo da iterações indicam um mau ajuste.

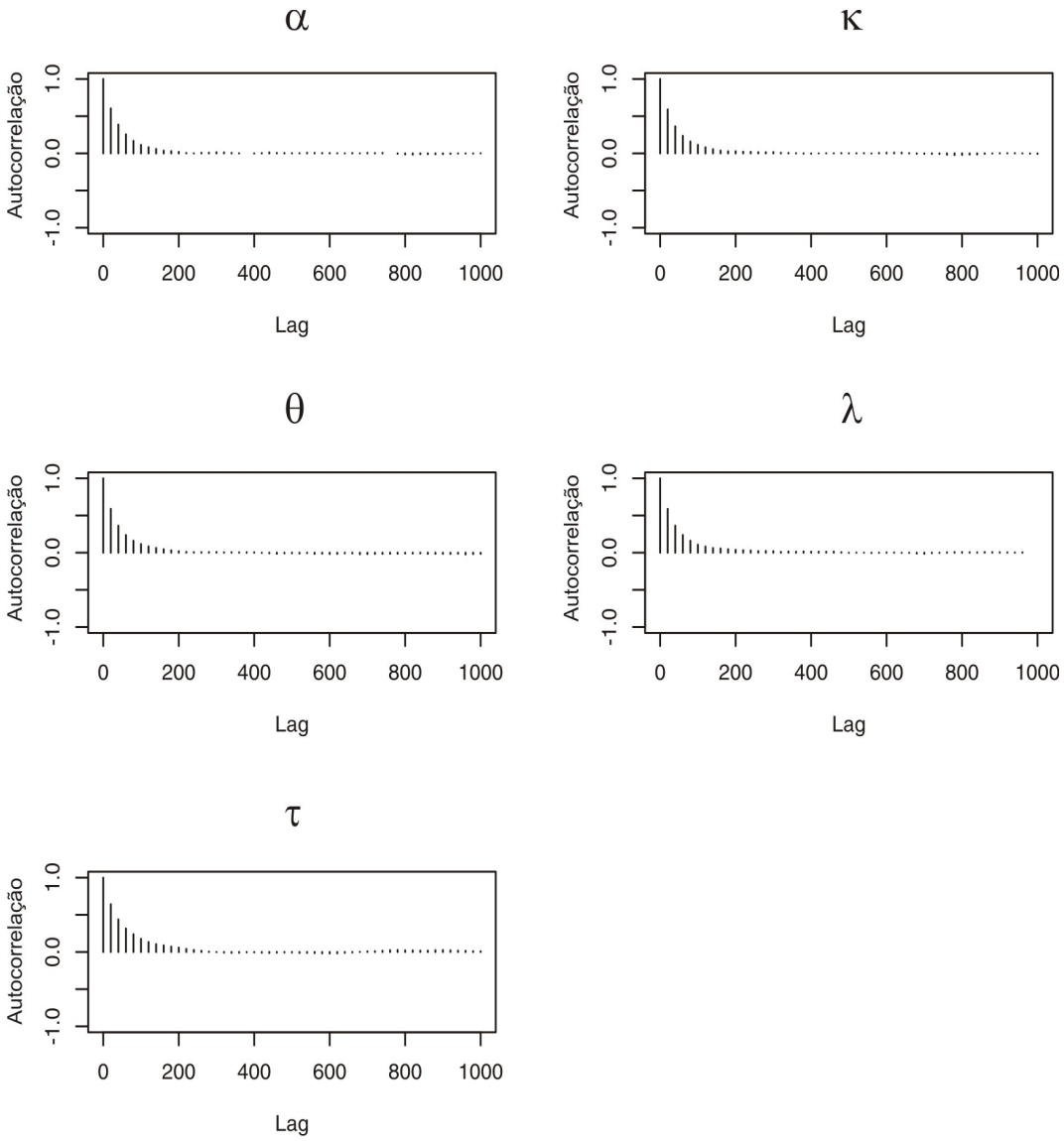

Figura 19: Autocorrelogramas dos parâmetros.

Os gráficos de autocorrelação dos parâmetros para o modelo selecionado evidenciam um ajuste adequado, pois rapidamente os valores se aproximam de zero.

É apresentado, na Figura 20, os resíduos de Geweke com 20 iterações amostradas em cada cadeia. Pode-se notar que a maioria dos pontos amostrados estão na zona aceitável, exceto para o parâmetro κ que apresenta valor discrepante. Os gráficos resultantes sugerem que a estacionaridade foi atingida.

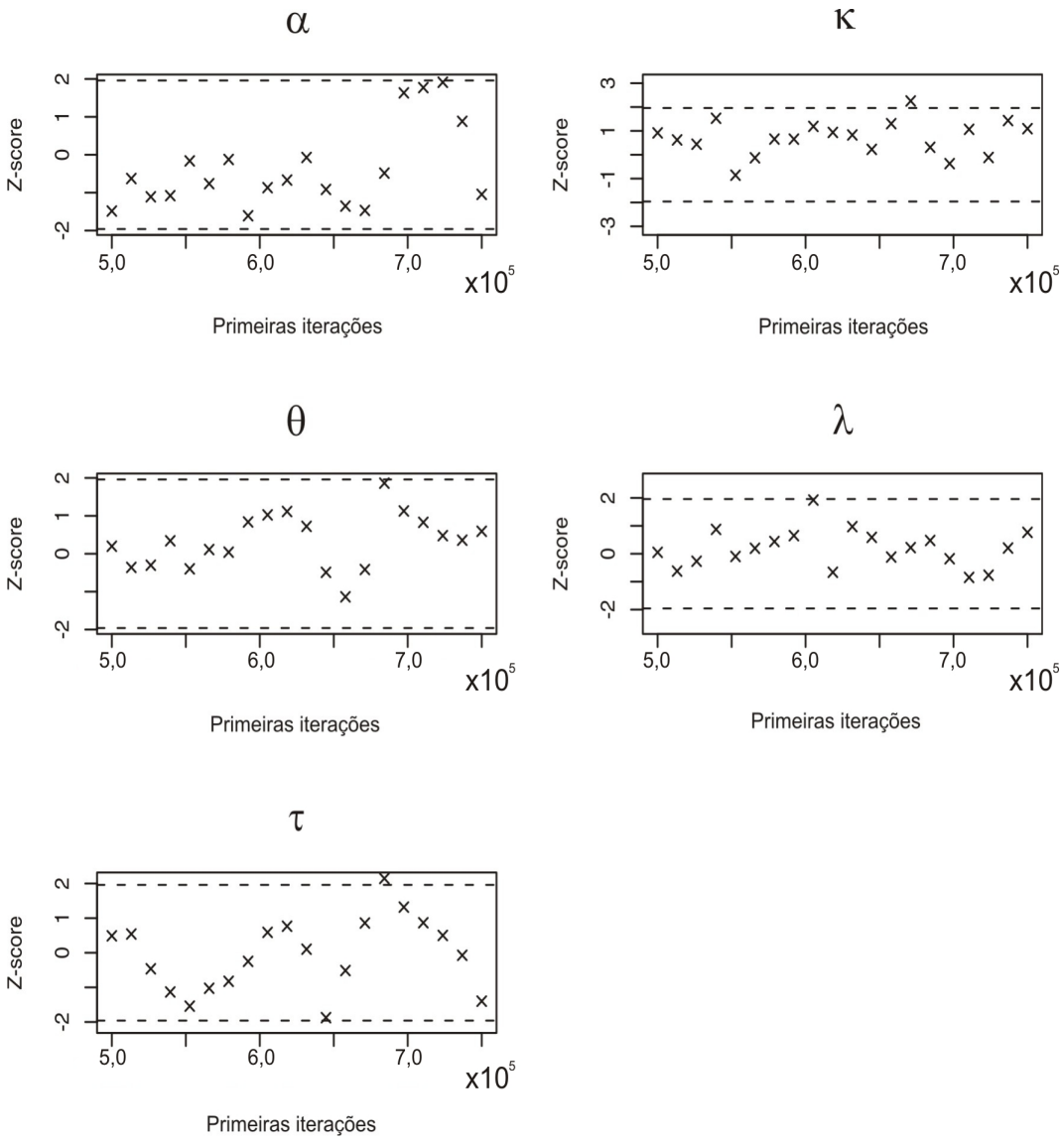

Figura 20: Resíduos de Geweke.

Verifica-se também, que os resíduos de κ e λ percorrem, de forma aparentemente aleatória, a faixa de amplitude ± 2, enquanto que θ, τ e, especialmente os de α, modificam repentinamente de comportamento.

É apresentado, na Tabela 10, a matriz de correlação entre os parâmetros modelo de Chapman-Richards com distribuição t de Student nos erros e estimação Bayesiana via algoritmo de Metropolis-Hastings.

Tabela 10: Matriz de correlação entre os parâmetros.

	Variável				
Variável	α	κ	δ	λ	τ
α	1,00000				
κ	0,07367	1,00000			
δ	-0,01446	-0,18006	1,00000		
λ	0,04572	-0,19698	0,12632	1,00000	
τ	0,29695	0,16497	0,02655	-0,31226	1,00000

É possível notar que as correlações são próxima de zero, havendo indícios então, de dependência a posteriori, exceto entre α e τ. Desta forma, pode ser que os valores simulados das quantidade aleatória α e τ interfiram na simulação uma da outra.

Na Tabela 11 o teste de Raftery e Lewis sugere valores para o burn-in e o total de iterações.

Tabela 11: Diagnósticos de Bayesianos.

Parâmetro	Raftery-Lewis			Heidelberger-Welch	Geweke
	Burn-in (B)	Total (N)	Fator (I)	p-valor	z
α	240	257040	6,86	0,122	-1,485
κ	200	217780	5,81	0,117	0,916
θ	240	253040	6,75	0,747	0,198
λ	200	215000	5,74	0,293	0,051
τ	480	518020	13,80	0.835	0,488

Para τ por exemplo, ele sugere um total de 518020 iterações com burn-in de 480 iterações. Na prática, os valores utilizados foram, até, quatrocentas vezes maiores na intenção de diminuir autocorrelações e aplicar os outros testes que necessitam de um número maior de iterações, já que, na aplicação dos mesmos, particiona-se os valores simulados. O fator de dependência de Raftery e Lewis aponta que as escolhas podem não ter sido as melhores para os estimativas iniciais. O teste de Heidelberger e Welch p-valores superiores a 10%, indicando a aceitação da hipótese de estacionaridade para este teste. Pode-se observar, ainda, os valores z do teste de Geweke de cada quantidade aleatória. Verifica-se que embora z_α esteja na faixa aceitável $(-1,96,\ 1,96)$, este valor, em módulo, supera a unidade e, portanto, descarta-se a hipótese de independência de $g(\kappa)$.

Na Figura 21 é possível verificar, que no gráfico dos resíduos de Pearson *versus* índices[2], que a maioria dos pontos estão compreendidos em ± 2, apesar da visível tendência nos erros.

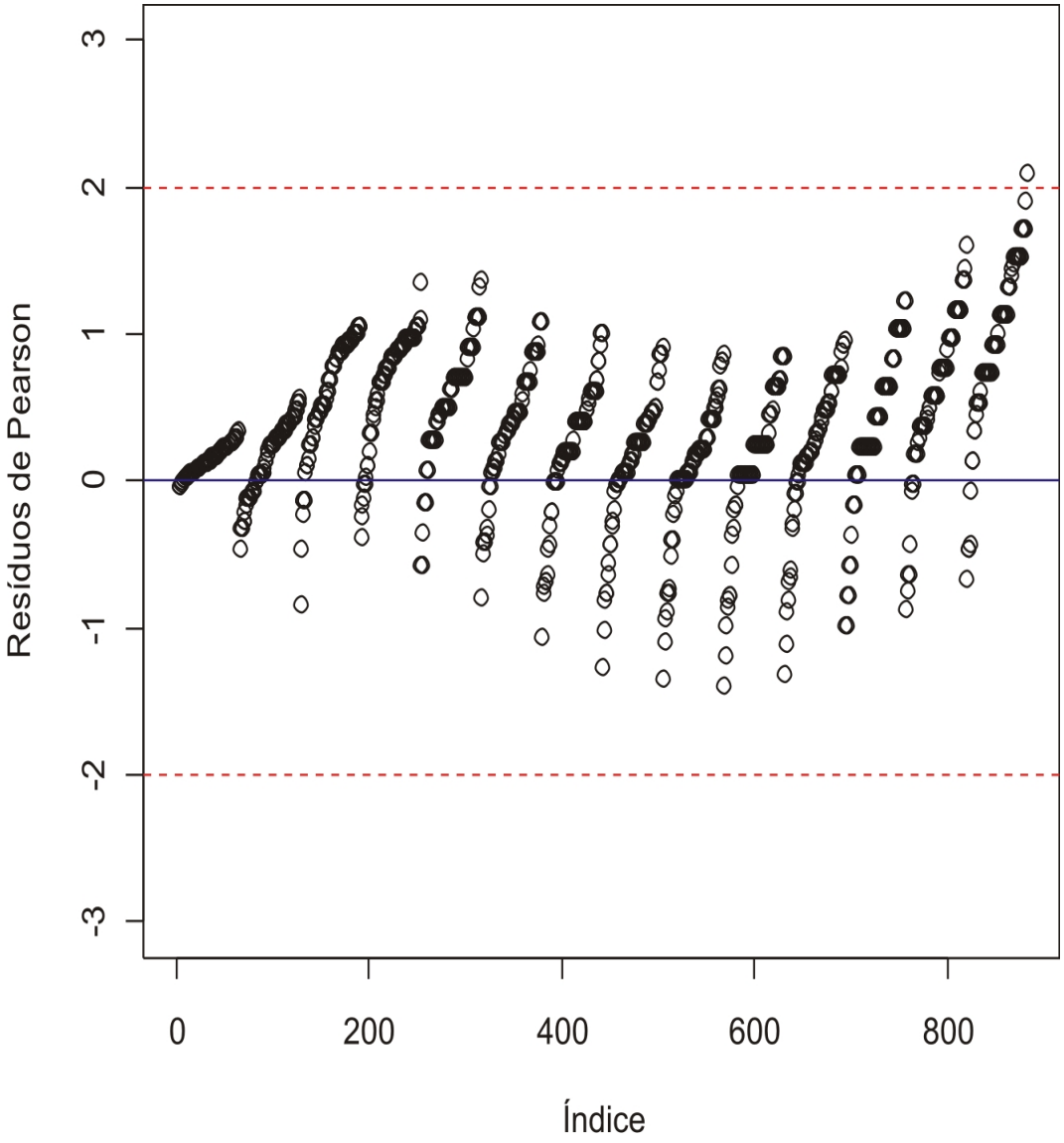

Figura 21: Gráfico dos resíduos de Pearson *versus* índices.

Á única medida registrada fora da amplitude ± 2, para o modelo transformado com distribuição t de Student, 5 graus de liberdade e inferência Bayesiana no parâmetros é proveniente da observação da quarta árvore no último mês.

[2]ordem das observações no banco de dados.

Outro diagnóstico possível (CORDEIRO e ANDRADE, 2009) é o gráfico dos valores retransformados (4.4) *versus* os dados originais. Esse gráfico, conforme Figura 22 deve ter comportamento, aproximandamente, linear.

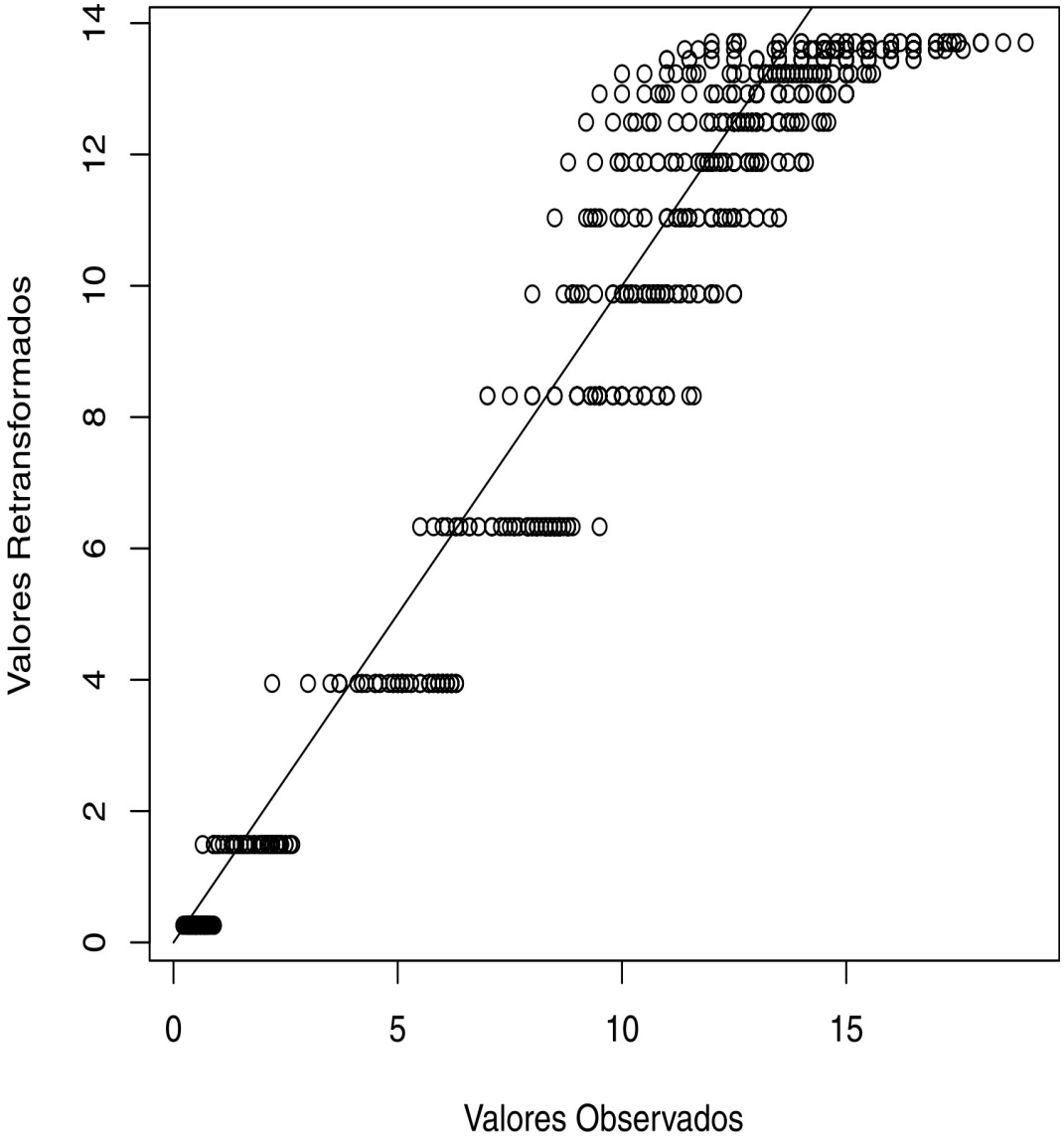

Figura 22: Gráfico dos dados originais *versus* retransformados.

Apesar do diagnóstico de Raftery e Lewis apontar para uma possível má escolha nas estimativas iniciais, os outros diagnósticos foram atendidos para o modelo selecionado. Portanto, a equação escolhida para representar o comportamento das alturas dos híbridos *Eucalyptus urophylla*, com cruzamento natural, ao longo dos 72 meses, seguindo um modelo simétrico com transformação de Box-Cox e inferência Bayesiana nos parâmetros é expresso por

$$\pi(\underline{\varphi}, \tau \mid \hat{y}_i^{(\lambda)}) \propto 0,4601^{-\frac{884}{2}} \prod_{i=1}^{882} h \left[\left(\frac{\hat{y}_i^{(0,8658)} - \hat{\eta}_i}{0,4601} \right)^2 \right] |\hat{y}_i^{-0,1142}| \times \exp\left(-\frac{5x_i^2 - 27,1516x_i + 10,1546}{0,9202} \right), \tag{4.1}$$

em que, a transformação de Box-Cox, seguindo o modelo de Chapman-Richards, é expresso por:

$$\hat{y}_i^{0,8658} = \frac{\hat{y}_i^{(0,8658)} - 1}{0,8658} \tag{4.2}$$

e o preditor não linear, é expresso por:

$$\hat{\eta}_i = 10,9384[1 - \exp(-0,061x_i)]^{1,7106} \tag{4.3}$$

com componente aleatória, seguindo a distribuição t_5-Student, expressa por

$$h(u_i) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)} (\nu + u_i)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

sendo

$$u_i = \left(\frac{\hat{y}_i^{(0,8658)} - \hat{\eta}_i}{0,4601} \right)^2.$$

Na Figura 23 se encontram os ajustes das estimativas clássicas e Bayesianas aos dados transformados obtidos da equação (2.8) com estimativas do modelo de Chapman-Richards e distribuição t de Student. Pode-se notar um bom ajuste para a estimativa bayesiana, exceto nos meses iniciais. As estimativas foram retiradas das Tabelas 6 e 8, respectivamente. Note que ao se executar a transformação de Box-Cox, as medidas para o segundo mês se tornaram negativas, pois, antes da transformação, eram quantidades inferiores a 1 metro. O mesmo vale para a estimação clássica. Note que a estimativa do parâmetro assintótica é $10,94$, fazendo com que o modelo perca a interpretação física. Isso acontece devido a variação da escala que a transformação proporciona (BOX e COX, 1964).

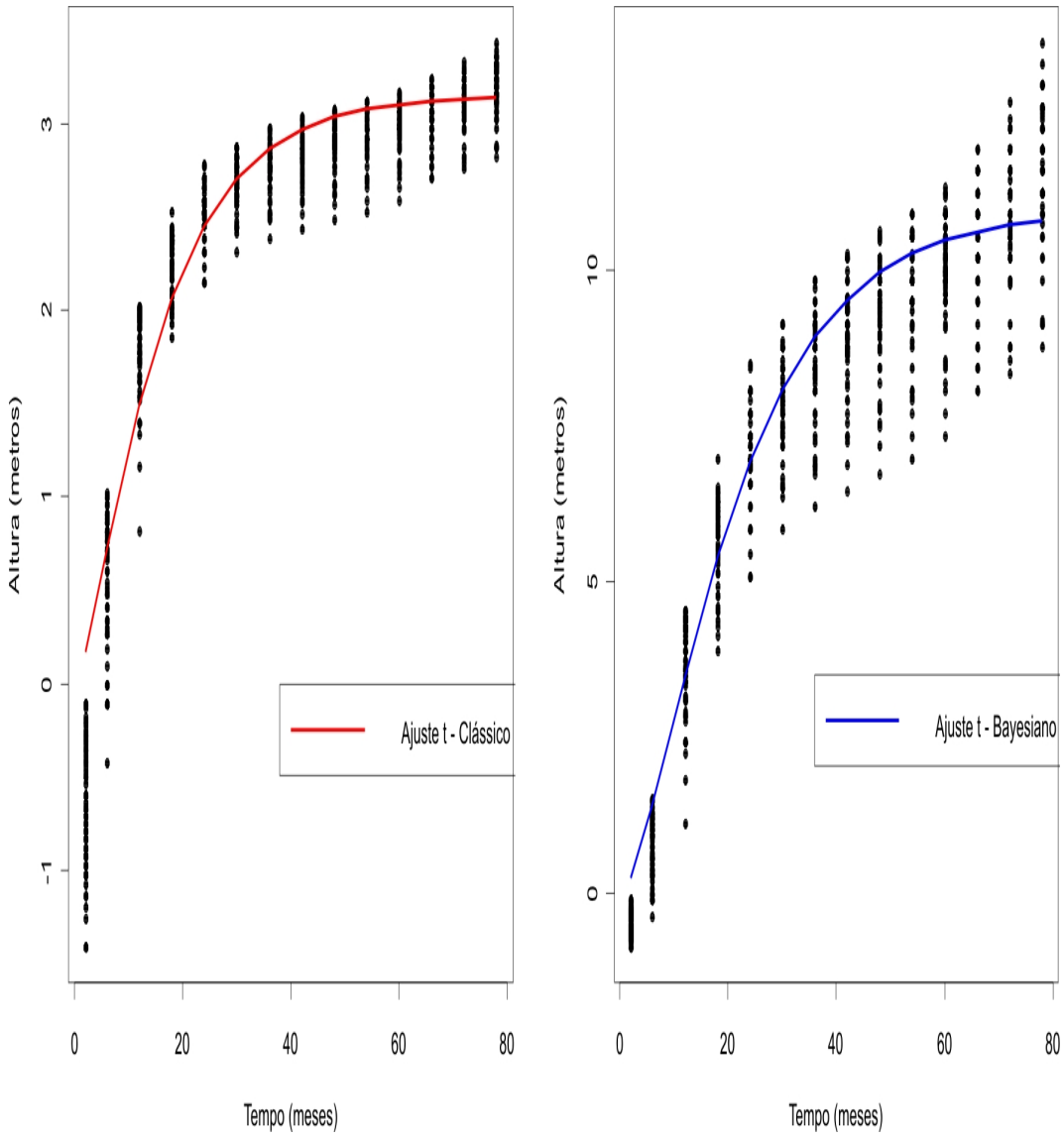

Figura 23: Ajuste das estimativas Bayesianas aos dados transformados.

Para efeito de aplicação, a equação (4.1) pode ser substituída pela combinação das equações (4.2) e (4.3), tal que:

$$\hat{y}_i^* = \left\{9,47046[1-\exp(-0,061x_i)]^{1,7106}+1\right\}^{1,155}, \tag{4.4}$$

o que simplifica a interpretação do modelo. A equação (4.4) é conhecida como retransformação (CORDEIRO, 2009). Note que essa equação, embora não pareça, a estimativa do parâmetro assintótico condiz com sua interpretação física. Para ver isso, subtraia o número um do termo entre chaves da equação (4.4), obtendo uma aproximação grosseira $\hat{y}_i^{\#}$ de $\hat{y}_i^*$:

$$\hat{y}_i^{\#} = 13,7218[1-\exp(-0,061x_i)]^{1,9757}, \tag{4.5}$$

em que a nova estimativa do parâmetro assintótico seria 13,7218.

Para avaliar a qualidade das estimativas transformadas aos dados originais, isto é, para averiguar a equação sem a distorção da escala, utilizou-se a retransformação (4.4), em que $\hat{Y}^* = (\hat{y}_1^*, ..., \hat{y}_n^*)^T$ é o vetor dos valores obtidos após a resolução da equação (2.8) em relação a Y tomando $Y^{(\lambda)} = \eta$, fornecendo o ajuste na mesma escala as alturas, sem o uso da transformação.

Pode-se notar, a partir da Figura 24, um bom ajuste, exceto na fase inicial.

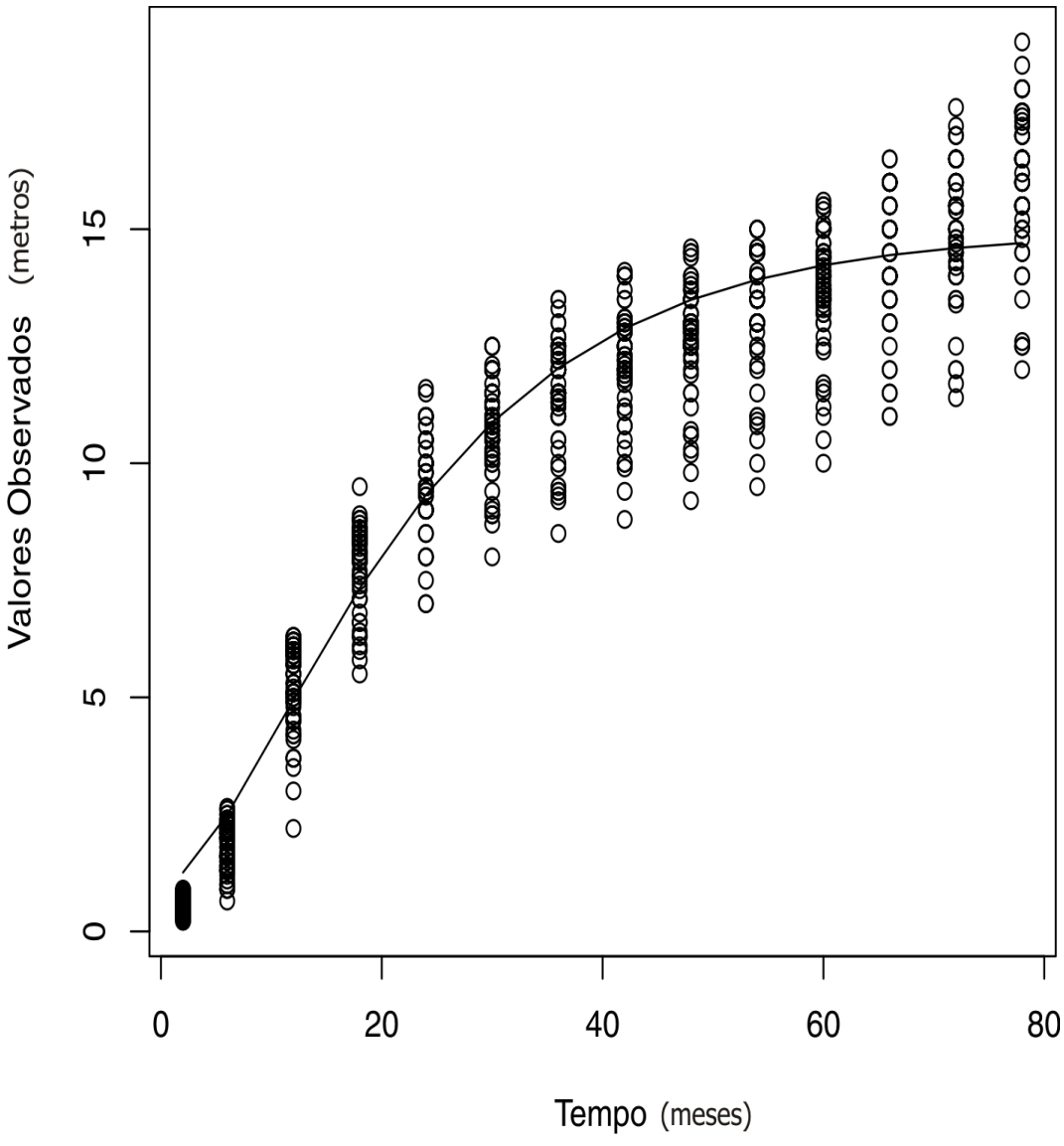

Figura 24: Ajuste das estimativas Bayesianas aos dados após retransformação.

Observe que a curva retransformada fornece bom ajuste aos dados, exceto para os dois meses iniciais e o mês final.

5 Considerações Finais

O *Eucalyptus* tem importância estratégica para a produção energética sustentável no Polo Gesseiro do Araripe. Portanto, estudos relativos a essa essência são relevantes na predição de produtividade e seleção de clones adaptados a região. O ajuste de curvas não lineares, que relacionam altura e idade, tem se mostrado adequado para descrever curvas de crescimento. O modelo de Chapman-Richards, normalmente, distribuído é muito utilizado, na prática. Entretanto, diversas propostas têm sido desenvolvidas com o objetivo de minimizar a influência de observações discrepantes na estimativa dos parâmetros. Os métodos Bayesianos introduzem incerteza sobre os parâmetros, de forma que, torna-se possível atingir soluções mais eficientes.

De um modo geral, observou-se que os modelos simétricos transformados com distribuição t de Student com 5 graus de liberdade, função de ligação não linear seguindo o modelo de Chapman-Richards e inferência Bayesiana via algoritmo de Metropolis-Hastings se ajusta bem aos dados de crescimento de *Eucalyptus* no Polo Gesseiro do Araripe. Do ponto de vista aplicado, estas informações podem ser relevantes para o processo de seleção de clones mais bem adaptados as condições da região.

Espera-se que este trabalho possa ser estendido futuramente para outros modelos não lineares, como Bertalanffy, Brody, Silva-Bailey, Schumacher, entre outros. Outras transformações podem ser investigadas como a de Manly, de John e Draper e a de Bickel Doksum. No que se refere a inferência Bayesiana, espera-se que trabalhos futuros possam aplicar o algoritmo de Gibbs. Outras estruturas, diferentes dos modelos simétricos, podem ser investigadas como o modelos lineares generalizados.

Referências

AKAIKE, H. Use of an information theoric quantity for statistical model identification. IN: HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCES, 5th, 1972, Hawaii. **Proceedings ...**, Hawaii, Western Periodicals Co., p 249-250.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.

ANDRADE, E. N. **Manual do plantador de** *Eucalyptos*. Typografia Brazil de Rothschild & Comp., São Paulo, p.335, 1911.

ARAÚJO, S. M. S. de **O Pólo Gesseiro do Araripe:** unidades geo-ambientais e impactos da mineração. TESE (Doutorado em Geociências) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004, 305 p.

ATECEL. **Diagnóstico energético do setor industrial do pólo gesseiro da meso região de Araripina-PE**. Campina Grande, 2006. 126 p.

BALTAR, C. A. M.; BASTOS, F. de F.; LUZ, A. B. **Diagnóstico do pólo gesseiro de Pernambuco (Brasil) com ênfase na produção de gipsita para fabricação de cimento**. 2003. Disponível em: <http://www.minas.upm.es/catedra-anefa/Consultas/MAGALHAES Carlos_IVBERMAC.pdf>. Acesso em: 10 set. 2009.

BALTAR, C. A. M.; BASTOS, F. de F.; LUZ, A. B. **Gipsita**. Ministério da Ciência e Tecnologia, 2005, p. 449 a 470. Comunicação Técnica elaborada para Edição do Livro Rochas & Minerais Industriais: usos e especificações.

BERTALANFFY, L. von. A quantitative theory of organic growth. **Human Biology**, Detroit, v. 10, n. 2, p. 181-213, 1934.

BERTALANFFY, L. von. Quantitative laws for metabolism and growth. **The Quaterly Review of Biology**, New York, v. 32, n. 3, p. 217-231, 1957.

BRITO, C. C. R. **Novos modelos de crescimento resultantes da combinação e variações dos modelos de Chapman-Richards e Silva-Bailey, aplicados em Leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam) de Wit] e tubarão Junteiro (Carcharhinus porosus)**. 2005. 141 p. Dissertação (Mestrado em Biometria) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

BRITO, C. C. R. **Correção de Bartlett nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos** 2009. 160 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BOX, G. E. P.; COX, D.R. An analysis of transformation. **Journal of the Royal Statistical Society** Series B (Methodological), London, v. 26, n. 2, p. 211-252, 1964.

BOX, M. J.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. London: Wiley Classics Library, 1973.

CRAWLEY, M. J. **The R book**. West Sussex: Wiley and sons, 2007.

CHAPMAN, D. E. Statistical problems in dynamics of exploited fishering populations. IN: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTIC AND PROBABILITY, 4th, 1961, Berkeley. **Proceedings ...**, Berkeley, **University of California Press**, p 249-250.

CHIB, S .; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. **American Statistician**, v. 49, n. 4, p. 327-335, 1995.

CORDEIRO, G.M.; ANDRADE, M.G. Transformed Generalized Linear Models. **Journal of Statistical Planning and Inference**, North-Holland, v. 137, n. 9, p. 2970-2987, 2007.

CORDEIRO, G.M.; ANDRADE, M.G. Transformed symmetric models. 2009. Disponível em: <http://virtualbib.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE08/paper/view/405/25>. Acesso em: 05 jul. 2009.

CODEIRO, G. M. **Introdução à teoria Assintótica**. IN: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 22^o, 1999, Rio de Janeiro. **Anais ...**, Rio de Janeiro: IMPA, 1999. p. 3-97.

COX, D. R.; HINCKLEY, D. V. **Theoretical Statistics**. London: Chapman and Hall, 1974. 511 p.

COWLES, M.; CARLIN, B. Markov chain Monte Carlo convergence diagnostics: a comparative review. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 91, p. 883-904, 1996.

CYSNEIROS, F. J. A.; PAULA, G. A.; GALEA, M. **Modelos Simétricos Aplicados**. Águas de São Pedro: 2005. Disponível em: <http://www.de.ufpe.br/ cysneiros/texto_final.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2010.

DRAPER, N. R.; Cox, D. R. On distributions and their transformation to normality. **Journal of the Royal Statistical Society.** Series B (Statistical Methodology), London: v. 31, n. 3, p. 472-476.

DEY, D. K.; GHOSH, S. K.; MALLICK, B. K. **Generalized Linear Models: a Bayesian perspective**. New York: Chapman & Hall, 2000.

EHLERS, R. S. **Métodos Computacionalmente Intensivos em Estatística**. Curitiba: 2004. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/ ehlers/notas/mci.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2010.

FANG, K. T.; ANDERSON, T. W. **Statistical inference in elliptical contoured and related distributions**. New York: Allerton Press, 1990.

FANG, K. T.; KOTZ, S.; NG, K. W. **Symmetric multivariate and related distributions**. London: Chapman and Hall, 1990.

FANG, K. T.; ZHANG, Y. T. **Generalized multivariate analysis**. New York: Springer-Verlag, 1990.

FISK, P. R. The graduation of income distributions. **Econometrica**, Chicago, v. 29, n. 2, p. 171-185, 1961.

GADELHA, F. H. L. et al. **Rendimento volumétrico e energético de clones híbridos de** *Eucalyptus sp*. **na Chapada do Araripe - PE**. 2010. 54 p. Dissertação (Mestrado em Biometria) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

GATTO, D. A. et al. Características da lenha produzida da Região da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul. **Ciência Florestal**, Santa Maria v. 13, n. 2, p. 7 - 16, 2003.

GELFAND, A.; SMITH, A. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 85, n. 410, p. 398 - 409, 1990.

GELMAN, A.; RUBIN, D. Inference from iterative simulation using multiple sequences, **Statistical Science**, v. 7, n. 4, p. 457-472, 1992.

GEYER, C. Practical Markov chain Monte Carlo (with discussion), **Statistical Science** [s.l.], v. 7, n. 4, p. 473-483.

GILKS, W. R.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D. J. **Markov Chain Monte Carlo in Practice**. London: Chapman & Hall, 1996. p. 343.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions**. 2 ed. New York: John Wiley, 1994. v. 1. 769 p.

_____. **Continuous univariate distributions**. 2 ed. New York: John Wiley, 1994. v. 2. 732 p.

LANGE, K. L.; LITTLE, R. J. A.; TAYLOR, J. M. G. Robust statistical modeling using the t distribution. **Journal of the American Statistical Association**, New York, v. 84, n. 408, p. 881-896, 1989.

LEE, Y.; NELDER, J.A.; PAWITAN, Y. **Generalized linear models with random effects: unified analysis via H-likelihood**. London: Chapman & Hall, 2006. p. 44.

LEHMANN, E. L. "Student" and Small-Sample Theory. **Statistical Science**, Hayward, v. 14, n. 4, p. 418 - 426, 1999.

LEHMANN, E. L.; CASELA, G. **Theory of point estimation**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1998. 589 p.

LEIVA, V. ; BARROS, M. ; PAULA, G. A. **Generalized Birnbaum-Saunders Models using R**. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2009. v. 1. 329 p.

LIMA-FILHO, L. M. A. **Modelos simétricos transformados não-lineares com diferentes distribuições dos erros: aplicações em ciências florestais**. 2009. 90 p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

MANLY, B.F. Exponential data transformation. **The Statistician**, [s.l.] v. 25, p. 37-42, 1976.

MERRAN, E; HASTINGS, N.A.J.; PEACOCK, J.B. **Statistical distributions : a handbook for students and practitioners**. London : Butterworth, 1975

METROPOLIS, N. et al. Equations of state calculations by fast computing machine. **Journal of chemical Physics**, New York, v. 21, n. 6, p. 1087-1092, 1953.

MORA, A. L.; GARCIA, C. H. **A cultura do eucalipto no Brasil**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Silvicultura, 2000. 112 p.

NTZOUFRAS, I. **Bayesian modeling using WinBUGS**. New Jersey: John Wiley and Sons, 2009.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446 p.

PERICCHI, L. R. A Bayesian Approach to Transformations to Normality. **Biometrika** Series A, London, v. 68, n. 1, p. 35-43, 1981.

PERES, L.; BENACHOUR, M.; SANTOS, V. A. **Gesso:** produção e utilização na construção civil. Recife: Bagaço, 2001.

PERNAMBUCO. **Secretaria de desenvolvimento Humano**. Disponível em: <http://www.municipios.pe.gov.br> Acesso em: 10 jul. 2009.

PLACKETT, R. L. The analysis of life-test data. **Technometrics**, Washington, v. 1, n. 1, p. 9-19, 1959.

PRODAN, M. **Forest biometrics**. New York: Pergamon, 1968. 447 p.

RICHARDS, F.J. A flexible growth function of empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, n. 2, p. 290-300, 1959.

SAKIA, R.M. The Box-Cox transformation technique: a review. **Journal of the Royal Statistical Society.** Series D (The Statistician), Alexandria, v. 41, n. 2, p. 169-178, 1992.

SANTOS, C. S. A. **Modelos simétricos transformados não lineares com aplicação na estimativa volumétrica em híbrido de eucalyptus tereticornis no pólo gesseiro do Araripe-PE**. 2010. 91 p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

SCHNEIDER, P. R. **Análise de regressão aplicada à Engenharia Florestal**. Santa Maria: UFMS/CEPEF, 1997. 217 p.

SILVA, J. A. A. **Dynamics of stand structure in fertilized slash pine plantations**. 1986. 139 p. Thesis (Doctor of Philosophy) - University of Georgia, Athens. 1986.

SILVA, J. A. A. Potencialidades de florestas energéticas de *Eucalyptus* no Polo Gesseiro do Araripe. **Anais da Academia Pernambucana de Ciências Agronômicas**, Recife v. 6, p. 301-319, 2009.

SILVA, J. A. A., et al. Aumento da precisão de modelos volumétricos através do uso a transformação de Box-Cox. **CERNE**, Lavras, v.1, n.1, p. 13-16, 1994.

Sindicato das Indústrias do Gesso. **Pólo gesseiro**. Disponível em: <http://www.sindusgesso.org.br/>. Acesso em 25 jul. 2009.

SOBRINHO, A. C. P.; AMARAL, A. J. R.; DANTAS, J. O. C. Gipsita. 2003. Disponível em: <http://www.dnpm-pe.gov.br/>. Acesso em 25 jul. 2009.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of the model. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 6, n. 2, p. 461 - 464, 1978.

TURNBULL, K. V. **Population dynamics in mixed forest stands:** a system of mathematical models of mixed stand growth and structure. 1963. 186 p. Thesis (PhD Thesis) - University of Washington, Washington.

TRUGILHO, P.F. et al. Avaliação de clones de Eucalyptus para produção de carvão vegetal. **Cerne**, Lavras, v. 7, n. 2, p. 104-114, 2001.

VENABLES,W. N. et al. **An Introduction to R**. R Development Core Team, 2008.

APÊNDICE

Abaixo, são apresentados exemplos de algoritmos de estimação clássica e Bayesiana do modelo de Chapman-Richards desenvolvidos, respectivamente, em SAS e R, para uma amostra aleatória de 56 observações dos dados investigados nesta dissertação.

```
*************************************************************************************;
*PROGRAMA 1;
*MODELO TRANSFORMADO DE CHAPMAN-RICHARDS COM DISTRIBUIÇÃO;
*NORMAL DOS ERROS PARA OS DADOS DE ALTURA DE Eucalyptus urophyla;
*SOFTWARE: SAS;
*************************************************************************************;
data euc;
input t y @@;
datalines;
2 0.22 2 0.38 2 0.44 2 0.58 2 0.64 2 0.7 6 1.3
6 2 6 2.1 6 2.3 12 3.7 12 4.5 12 5 12 6.2
18 7.5 18 7.9 18 7.9 18 8 18 8.6 24 9.8 24 10
30 9.8 30 10.8 30 11 36 9.9 36 11.5 36 12 36 12
36 12.4 36 12.5 42 10 42 12.8 48 12.9 48 12.9 48 13
48 13.7 48 14 54 10 54 10.8 54 13 54 14.5 60 13.2
60 13.4 60 13.6 60 14.4 60 14.4 60 14.5 66 12.5 66 14
66 14 72 14.3 72 16.5 72 17.2 78 16 78 16.5 78 16.5;
run;
*Normal Transformado;
proc nlp data=euc cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a0=9, k0=.2, m0=.4 , l0=1,phi=1;
media=a0*(1-exp(-k0*(t)))**(-m0);
yt =((y)**l0-1)/l0;
u=((yt-media)**2)/phi;
loglik=(-0.5)*log(phi)-u/2+(l0-1)*log(y);
```

```
run;

#*********************************************************************************************

#PROGRAMA 2:
#MODELO TRANSFORMADO DE CHAPMAN-RICHARDS COM DISTRIBUIÇÃO
#NORMAL DOS ERROS UTILIZANDO ALGORITMO DE METROPOLIS-HASTINGS
#SOFTWARE: R

#*********************************************************************************************

x=c(2 ,2 ,2 ,2 ,2 ,2 ,6 ,6 ,6 ,6 ,12 ,12 ,12 ,12 ,18 ,18 ,18 ,
18 ,18 ,24 ,24 ,30 ,30 ,30 ,36 ,36 ,36 ,36 ,36 ,36 ,42 ,
42 ,48 ,48 ,48 ,48 ,48 ,54 ,54 ,54 ,54 ,60 ,60 ,60 ,60 ,
60 ,60 ,66 ,66 ,66 ,72 ,72 ,72 ,78 ,78 ,78)
y=c(0.22,0.38,0.44,0.58,0.64,0.70,1.30,2.00,2.10,2.30,3.70,
4.50,5.00,6.20,7.50,7.90,7.90,8.00,8.60,9.80,10.00,9.80,10.80,
11.00,9.90,11.50,12.00,12.00,12.40,12.50,10.00,12.80,12.90,12.90,
13.00,13.70,14.00,10.00,10.80,13.00,14.50,13.20,13.40,13.60,
14.40,14.40,14.50,12.50,14.00,14.00,14.30,16.50,17.20,16.00,16.50,16.50)
n=length(y);t=x
a0= 8.438049
k0 = 0.067424
m0 = -1.825682
l0 = 0.739841
phi = 0.456218
t0=1/phi
y.t=((y)^l0-1)/l0
plot(t,y.t)
eta1=a0*(1-exp(-k0*t))**(-m0)
lines(t,eta1)
start=c(a0,k0,m0,l0,t0)
taxa=0
L=function(a,k,m,l,t,x,y)
eta=a*(1-exp(-k*x))**(-m)
y.t1=((y)^(l) - 1)/l
u=t*(y.t1-eta)^2
L=-.5*n*log(2*pi)+.5*n*log(t)-.5*sum(u)+sum((l-1)*log(abs(y)))
return(L)
```

```
sa0=.5;sk0=.005;sm0=.1;sl0=.01;st0=t0
metrop=function(N,x,y,L,start)
alpha=matrix(NA,nrow=N)
kappa=matrix(NA,nrow=N)
theta=matrix(NA,nrow=N)
lambda=matrix(NA,nrow=N)
tau=matrix(NA,nrow=N)
alpha[1]=start[1]
kappa[1]=start[2]
theta[1]=start[3]
lambda[1]=start[4]
tau[1]=start[5]
for(i in 2:N)
a=rnorm(1,a0,sa0)
k=rnorm(1,k0,sk0)
m=rnorm(1,m0,sm0)
l=rnorm(1,l0,sl0)
t=runif(1,0,t0)
A=(L(a,k,m,l,t,x,y)/L(alpha[i-1],kappa[i-1],theta[i-1],
lambda[i-1],tau[i-1],x,y)
*dnorm(a, a0, sa0, log=F)
/dnorm(alpha[i-1], a0, sa0,log=F)
*dnorm(k, k0, sk0, log=F)
/dnorm(kappa[i-1], k0, sk0, log=F)
*dnorm(m, m0, sm0, log=F)
/dnorm(theta[i-1], m0, sm0, log=F)
*dnorm(l, l0, sl0, log=F)
/dnorm(lambda[i-1], l0, sl0, log=F)
*dunif(t, 0, t0, log=F)
/dunif(tau[i-1], 0, t0, log=F))
prob=min(1,A)
u=runif(1)
if(u<prob)
alpha[i]=a
kappa[i]=k
theta[i]=m
lambda[i]=l
```

```
tau[i]=t
taxa=taxa+1
else
alpha[i]=alpha[i-1]
kappa[i]=kappa[i-1]
theta[i]=theta[i-1]
lambda[i]=lambda[i-1]
tau[i]=tau[i-1]
taxa=taxa/N
return(list(alpha=alpha,kappa=kappa,theta=theta,
lambda=lambda,tau=tau,taxa=round(taxa,2)))
N=10^6
met=metrop(N,x,y,L,start)
alphaMH=met$alpha
kappaMH=met$kappa
thetaMH=met$theta
lambdaMH=met$lambda
tauMH=met$tau
met$taxa
#################
#Burn-in: 10% de N
#################
library(coda)
B=N/10
salto=10
alfaMH.b=alphaMH
kappaMH.b=kappaMH
thetaMH.b=thetaMH
lambdaMH.b=lambdaMH
tauMH.b=tauMH
MCMCdata=cbind(alfaMH.b,kappaMH.b,thetaMH.b,lambdaMH.b,tauMH.b)
MCMCdata=as.data.frame(MCMCdata,header=T)
size = dim(MCMCdata)[1]
num.parms = dim(MCMCdata)[2]
All.parms <- MCMCdata[, 1:num.parms]
MCMCdata.All = mcmc(data=All.parms, start = B, end = size, thin = salto)
MCMC=as.matrix(MCMCdata.All)
```

```
a.m=mean(MCMC[,1])
k.m=mean(MCMC[,2])
m.m=mean(MCMC[,3])
l.m=mean(MCMC[,4])
t.m=mean(MCMC[,5])
par(mfrow=c(1,1))
plot(x, y.t, pch=20, xlab="Tempo", ylab="Altura")
lines(t,eta1,col=2)
eta=a.m*(1 - exp(-k.m*(x))) ^ (-m.m)
lines(x,a.m*(1 - exp(-k.m*(x))) ^ (-m.m),lwd=2,col=4)
```