ANGELA ALVES DE ARAÚJO BARROS

DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIALIZADAS E ESTENDIDAS: UMA ABORDAGEM CLÁSSICA E BAYESIANA

RECIFE-PE – MAIO/2008

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIALIZADAS E ESTENDIDAS: UMA ABORDAGEM CLÁSSICA E BAYESIANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional (com ênfase nas áreas agrárias, biológicas e humanas).

Orientador(a): Prof. Dr. Eufrázio de Souza Santos

Co-orientador(a): Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro

RECIFE-PE – MAIO/2008

Aprender é a única coisa
que a mente nunca se cansa,
não teme e nem se arrepende.
(Leonardo da Vinci)

Agradecimentos

A Deus, por me dar saúde para seguir sempre em frente e por me abençoar a cada dia.

Aos meus pais, que são tão importantes em minha vida, os quais amo muito e que me deram as condições necessárias para alcançar meus objetivos.

Ao meu esposo, Isaac, pelo apoio e dedicação que me tem dado e a meu filho, Guilherme, que iluminou nossas vidas desde seu nascimento. À eles, meu amor e gratidão para sempre.

Aos meus irmãos que tanto amo, Manoel Filho e Natália.

Ao meu orientador, prof. Eufrázio, pela confiança e estímulo, a minha eterna gratidão.

Ao meu co-orientador, prof. Gauss, por acreditar que seria capaz de produzir essa dissertação, pelo apoio e paciência, também dedico minha gratidão.

Às minhas grandes amigas, Patrícia, Tarciana, Tatiene, Juliana e Alane, pelo amor, carinho e apoio que sempre estão dispostas a me oferecer.

Aos meus colegas de mestrado Adriano, Domingos, Edilson, Eduardo, Esdras, Franck, Iran, Janilson, Lucas, Luis José, Luís Henrique, Moacy, e em especial, Rosângela, pelos bons momentos juntos, pelo apoio e incentivo, que sempre esteve presente em nosso grupo.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a concretização desse trabalho.

Resumo

A distribuição exponencial generalizada (GE), ou exponencial exponencializada (EE), foi introduzida por Gupta e Kundu (1999) como alternativa para o modelo gama ou Weibull em várias situações. Essas distribuições são bastante utilizadas para análise de tempos de vida e ambas apresentam vantagens e desvantagens. Então, para reunir as características de ambas, a distribuição EE foi proposta. Segundo Gupta e Kundu (2002), a EE pode ser utilizada com eficácia para análise de tempos de vida, principalmente, na presença de censura ou dados agrupados. Outras distribuições exponencializadas foram propostas por Kundu e Raqab (2005) e Nadarajah e Kotz (2003, 2006). Há, também, as distribuições do tipo Beta propostas por Nadarajah e Kotz (2004), Nadarajah e Gupta (2004) e Famoye et al. (2005). Nestes termos, Cordeiro e Stosic (2008) propõem uma família de distribuições denominada de distribuições *Estendidas*, que são uma variante das exponencializadas utilizando a função de sobrevivência para gerá-las. Neste trabalho, portanto, foi realizada uma revisão das distribuições do tipo exponencializadas, beta e estendidas, inclusive com a apresentação de alguns resultados novos.

Palavras-chave: distribuições exponenciais exponencializadas, distribuições estendidas, estimação Bayesiana.

Abstract

Generalized exponential (GE) or Exponentiated Exponential distribution was introduced by Gupta and Kundu (1999) as an alternative to a gamma model or Weibull model in many situations. These distributions are quite used for analysis of lifetime data and both have advantages and disadvantages, then to gather characteristics both, EE distribution was proposed. According to Gupta and Kundu (2002), the EE can be used effectively in analyzing any lifetime data particularly in presence of censoring or if the data are grouped. Other exponencialized distributions were proposed by Kundu and Raqab (2005), Nadarajah and Kotz (2003, 2006). There are, also, Beta distributions proposed by Beta Nadarajah and Kotz (2004), Nadarajah and Gupta (2004) and Famoye et al. (2005). Then, Cordeiro e Stosic (2008) propose a family of distributions named Extend distributions, which are a exponencialized variant of using the function of survival to generate them. In this paper, therefore, a revision was written about the exponentiated, beta and extend distributions, includin with the presentation of some new results.

Keywords: Exponentiated Exponential distribution, Extend distributions, Bayesian estimation.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A distribuição exponencial generalizada (GE), ou exponencial exponencializada (EE), foi introduzida por Gupta e Kundu (1999) como alternativa para o modelo gama ou Weibull em várias situações. Essas distribuições são bastante utilizadas para análise de tempo de vida e ambas apresentam vantagens e desvantagens, então para reunir características de ambas a distribuição EE foi proposta. Segundo Gupta e Kundu (2002), a EE pode ser utilizada com eficácia para análise de tempo de vida, principalmente na presença de censura ou dados agrupados.

Ainda na classe de distribuições exponencializadas há a distribuição de Rayleigh generalizada, proposta por Kundu e Raqab (2005), que pode ser utilizada em modelagem de dados de força e também em dados de tempo de vida em geral; a Weibull exponencializada, proposta por Mudholkar, segundo Choudhury (2005); a gama exponencializada, proposta por Nadarajah e Kotz (2006). Com relação a Gumbel exponencializada e Fréchet exponencializada, os artigos de Nadarajah e Kotz (2006) e Nadarajah e Kotz (2003), respectivamente, as propõem, porém aqui elas são apresentadas seguindo a proposição de geração da exponencial exponencializada e algumas de suas propriedades são obtidas.

Há, também, as distribuições do tipo Beta. As principais são: Beta Gumbel, proposta por Nadarajah e Kotz (2004) e pode ser aplicada nas diversas áreas da engenharia; Beta Fréchet, proposta por Nadarajah e Gupta (2004); e a Beta Weibull, proposta por Famoye et al. (2005).

Neste sentido, então, Cordeiro e Stosic (2008) propõem uma família de distribuições denominada de distribuições *Estendidas*, que são uma variante das exponencializadas utilizando a função de sobrevivência para gerá-las.

Assim, o objetivo dessa dissertação foi aplicar a transformação sugerida por Cordeiro e Stosic (2008) em algumas das principais distribuições contínuas e verificar as distribuições geradas pelo procedimento. Caso a distribuição gerada fosse desconhecida, algumas de suas propriedades seriam obtidas. Um outro objetivo seria realizar estudos sobre a família de distribuições estendidas tentando identificar distribuições *a priori* adequadas aos parâmetros da mesma.

No Capitulo 2 do presente trabalho encontra-se a revisão sobre os principais modelos contínuos e no Capitulo 3, sobre estimação bayesiana. No Capítulo 4 são apresentados os modelos exponencializados, sendo novos os resultados referentes à distribuição de Fréchet exponencializada e à de Gumbel exponencializada. No Capítulo 5 são descritos alguns modelos do tipo Beta. No Capítulo 6 é apresentado a transformação sugerida por Cordeiro e Stosic (2008) que gera as distribuições estendidas e algumas propriedades das distribuições desconhecidas que foram obtidas. No Capítulo 7 tem-se uma descrição da aplicabilidade da estimação Bayesiana no modelo exponencial exponencializado. O trabalho é finalizado com a apresentação das conclusões.

2 Principais Modelos Contínuos

Para estudar os resultados de um experimento aleatório e predizer o seu comportamento futuro, mantendo-se as mesmas condições, utiliza-se um modelo probabilístico no qual a partir da caracterização da variável aleatória, através da função de probabilidade (caso discreto) ou da função densidade (caso contínuo), é possível conhecer sua distribuição de probabilidade.

A distribuição de probabilidade é uma função que determina probabilidades para eventos. Para qualquer conjunto de eventos existem muitas maneiras de determinar probabilidades, de forma que a escolha de uma ou outra distribuição é equivalente a criar diferentes hipóteses sobre os eventos em questão.

As distribuições de probabilidade, também, podem ser especificadas via momentos ou por funções características. Por existir um grande número de modelos, apenas os modelos contínuos mais importantes serão tratados aqui.

2.1 Modelo Exponencial

2.1.1 Importância e aplicação

O modelo exponencial tem forte relação com o modelo discreto de Poisson. Enquanto a distribuição de Poisson pode ser usada para modelar o número de ocorrências em período contínuo, a distribuição exponencial pode modelar o intervalo entre as ocorrências sucessivas.

A distribuição exponencial desempenha importante papel na descrição de uma grande classe de fenômenos, tais como, tempo de vida de equipamentos, intervalo entre chegadas de mensagens eletrônicas, entre outros.

Uma propriedade importante do modelo exponencial é a *falta de memória*, que permite a translação da origem no cálculo de probabilidades, ou seja, a probabilidade de durar pelo menos $t + s$ anos, sabendo-se que já durou s, é igual à probabilidade de um equipamento novo durar pelo menos t anos. A distribuição exponencial é a única distribuição contínua com essa característica. O parâmetro da distribuição indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância ou volume, entre outros.

2.1.2 Função Densidade de Probabilidade

Uma variável aleatória contínua Y segue o modelo exponencial com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) for dada por

$$f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

2.1.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada (f.d.a.) da exponencial é dada por

$$F(y) = 1 - \exp(-\lambda y).$$

2.1.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da variável aleatória Y é definida por:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}).$$

desde que a esperança seja finita para t real em algum intervalo $-t_0 < t < t_0$, com $t > 0$.

Segundo Magalhães (2006), a função geradora de momentos é o valor esperado de uma função positiva da variável aleatória. Como outras transformadas, ela facilita o cálculo de probabilidades e de outras quantidades relacionadas.

Assim, a função geradora de momentos da distribuição exponencial é dada por

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y) = \lambda^{-1}$ e $V(Y) = \lambda^{-2}$.

2.1.5 Função Característica

A função característica da variável Y é definida por

$$\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E[cos(tY)] + iE[sen(tY)],$$

para t real e $i = \sqrt{-1}$.

A vantagem da função característica é que ela sempre existirá, porém com o inconveniente de trabalhar com uma função de valores complexos. Com relação a função geradora de momentos, esta condição é incerta, pois a integral que a define pode nem sempre ser finita e, portanto, nem sempre existirá.

Assim, a função característica da distribuição exponencial é dada por:

$$\phi_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad t < \lambda.$$

2.2 Modelo Uniforme Contínuo

2.2.1 Importância e aplicação

A distribuição uniforme é a mais simples distribuição contínua de probabilidade e define igual probabilidade para todos os valores de Y em um determinado intervalo. Por este motivo, é importante como distribuição de referência. Também é chamada de distribuição retangular.

Uma das mais importantes aplicações da distribuição uniforme é na geração de números aleatórios. Isto é, quase todos os geradores de números aleatórios geram números aleatórios no intervalo (0,1). Para outras distribuições, alguma transformação é aplicada aos números aleatórios uniforme.

2.2.2 Função Densidade de Probabilidade

Seja Y uma variável aleatória contínua no intervalo $[a, b] \subset I\!R$, no qual a e b sejam ambos finitos. Então diz-se que Y segue o modelo uniforme contínuo no intervalo $[a, b]$ com função densidade dada por

$$f(y; a, b) = \frac{1}{b - a}.$$

2.2.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da uniforme contínua é dada por

$$F(y) = \begin{cases} 0, & se \quad y \leq a; \\ \frac{y-a}{b-a}, & se \quad a \leq y \leq b; \\ 1, & se \quad b \leq y. \end{cases}$$

2.2.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da uniforme contínua é dada por

$$M_Y(t) = \frac{1}{(b-a)^t}[e^{bt} - e^{at}], \quad t \neq 0.$$

Logo, a média e variância são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{a+b}{2}, \\ V(Y) &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

2.2.5 Função Característica

A função característica da uniforme contínua é dada por

$$\phi_Y(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

2.3 Modelo Gama

2.3.1 Importância e aplicação

A distribuição gama possui uma relação com a distribuição de Poisson. Na Poisson o objetivo é obter o número de ocorrências de algum evento durante um período de tempo fixado. Na gama, o objetivo é conhecer o tempo necessário para obter um número especificado de ocorrências do evento.

A distribuição gama também fornece uma representação útil de muitos fenômenos físicos e um melhor ajuste à distribuição exponencial na modelagem de tempo de vida de equipamentos.

Aplica-se, também, a distribuição gama à análise de tempo de vida de equipamentos, de tempo de retorno de mercadorias com falhas, processos meteorológicos, teoria de riscos de seguros e a testes de confiabilidade.

2.3.2 Função Densidade de Probabilidade

Diz-se que Y segue o modelo gama se sua função densidade for

$$f(y;\beta,\alpha) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}, \quad y > 0,$$

em que α e β são parâmetros positivos e $\Gamma(\alpha)$ é a função gama definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \alpha > 0.$$

Pode-se observar que quando $\alpha = 1$ tem-se a distribuição exponencial com parâmetro β ($Y \sim Exp(\beta)$). Quando $\alpha = \frac{n}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$ tem-se a distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade ($Y \sim \chi^2_n$).

2.3.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da gama é dada por

$$F(y) = \frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}.$$

em que $\gamma(a,y) = \int_{0}^{y} t^{a-1} e^{-t} dt$.

2.3.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da gama é

$$M_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}, \quad t < \beta.$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y) = \alpha/\beta$ e $V(Y) = \alpha/\beta^2$.

2.3.5 Função Característica

A função característica da gama é dada por

$$\phi_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}, \quad t < \beta.$$

2.4 Modelo Lognormal

2.4.1 Importância e aplicação

A distribuição lognormal tem aplicações generalizadas. É muito utilizada em ciências físicas e sociais e em engenharia, neste último caso para descrever tamanho de partículas, o tempo para haver uma falha no processo (confiabilidade) e o tempo para consertar algo no processo (manutenção). Também, pode ser utilizada em uma variedade de situações biológicas e farmacológicas.

2.4.2 Função Densidade de Probabilidade

A variável aleatória Y tem distribuição lognormal se tem função densidade dada por

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right)^2},$$

para $y > 0$, μ e $\sigma > 0$, sendo, respectivamente, média e desvio padrão das variáveis logarítmicas (por definição, a variável logarítmica é normalmente distribuída).

Algumas vezes, a distribuição lognormal é denotada por $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ tal qual a distribuição normal o é por $N(\mu, \sigma^2)$.

2.4.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição da lognormal é dada por

$$F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{\log(y) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right],$$

em que $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y \exp(-t^2)dt$ é a *função erro* ou *função erro gaussiana.*

2.4.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da lognormal é dada por

$$M_Y(t) = \exp\left(k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}\right).$$

Logo, a média e variância são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \\ V(Y) &= \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1]. \end{aligned}$$

2.5 Modelo Normal Inversa

2.5.1 Importância e aplicação

A distribuição normal inversa, ou ainda, distribuição inversa Gaussiana, tem esse nome pois, apresenta uma relação inversa entre as funções geradoras de cumulantes desta distribuição com o da distribuição normal.

Existem muitas parametrizações diferentes para a distribuição inversa Gaussiana que podem confundir um principiante. Tomando por base a parametrização da função de densidade de probabilidade descrita abaixo, vale ressaltar que, como θ tende a infinito, a distribuição normal inversa torna-se mais próxima da distribuição normal.

A distribuição normal inversa possui várias propriedades análogas a distribuição normal, como por exemplo, no caso iid: $\overline{Y} \sim N^{-}(\mu, n\theta)$.

2.5.2 Função Densidade de Probabilidade

A função densidade da distribuição normal inversa é dada por

$$f(y; \mu, \theta) = \left(\frac{\theta}{2\pi y^3}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-\theta(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right], \quad y > 0,$$

em que, $\theta > 0$ e $\mu > 0$.

2.5.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição da normal inversa é dada por

$$F_Y(y) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\theta}{y}}\left(\frac{y}{\mu}-1\right)\right] + \exp\left(\frac{2\theta}{\mu}\right)\Phi\left[-\sqrt{\frac{\theta}{y}}\left(\frac{y}{\mu}+1\right)\right],$$

em que $\Phi(.)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

2.5.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da normal inversa é dada por

$$M_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\mu}\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\theta}}\right).$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y)=\mu$ e $V(Y)=\mu^3/\theta$.

2.5.5 Função Característica

A função característica da normal inversa é dada por

$$\phi_Y(t) = \exp\left\{\frac{\theta}{\mu}\left[1-\left(1-\frac{2i\mu^2 t}{\theta}\right)^{1/2}\right]\right\}.$$

2.6 Modelo Beta

2.6.1 Importância e aplicação

A distribuição beta surge naturalmente como a distribuição de $V^2 = Y_1^2/(Y_1^2+Y_2^2)$, em que Y_1^2, Y_2^2 são variáveis aleatórias independentes e Y_j^2 tem distribuição χ^2 com ν_j $(j=1,2)$ graus de liberdade. Logo, V^2 segue uma distribuição beta com parâmetros $p=\nu_1/2$ e $q=\nu_2/2$. A distribuição beta, também, está relacionada com algumas outras distribuições tais como: t-Student, F, F não-central, binomial e binomial negativa.

Aplicações da distribuição beta são frequentes para modelar dados consistentes de proporções, variáveis hidrológicas, índices relacionados à radiação solar e outros. Também é amplamente utilizada para ajustar distribuições teóricas cujas amplitudes de variação são conhecidas. O ajuste pode ser realizado após equacionar o primeiro e segundo momentos das curvas teórica e ajustada.

2.6.2 Função Densidade de Probabilidade

A função densidade da distribuição beta é dada por

$$f(y;p,q) = \frac{1}{B(p,q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1}, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

em que $p > 0$, $q > 0$ e $B(p,q)$ é a função beta definida por

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

2.6.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da beta é dada por

$$F(y) = \frac{B_y(p,q)}{B(p,q)},$$

em que $B_y(p,q)$ é a função beta incompleta definida por

$$\int_0^y t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

2.6.4 Função Geradora de Momentos

Seja $\mu_r^{'}$ o momento ordinário de ordem r. Assim, $\mu_r^{'} = E(Y^r)$. Logo, o momento ordinário de ordem r da distribuição beta é

$$\mu_r^{'} = \frac{B(p+r,q)}{B(p,q)} = \frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+r).}$$

Logo, a média e variância são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{p}{p+q}, \\ V(Y) &= pq(p+q)^{-2}(p+q+1)^{-1}. \end{aligned}$$

2.7 Modelo Logístico

2.7.1 Importância e aplicação

A primeira referência para o uso da função logística como uma curva de crescimento foi através de Verhulst em 1838. O uso da curva para estudos demográficos econômicos tem sido muito popular desde o fim do século XIX e muitas outras aplicações da curva logística têm sido estudadas durante os anos tendo, por exemplo, o uso para modelar dados de produções agrícolas. Vários pesquisadores aplicaram o modelo logístico como um modelo de crescimento em populações humanas, bem como, em alguns organismos biológicos. A função de distribuição logística é muito importante nas aplicações em diferentes áreas.

2.7.2 Função Densidade de Probabilidade

A função densidade da distribuição logística é dada por

$$\begin{aligned} f(y;\mu,\nu) &= \frac{e^{-(y-\mu)/\nu}}{\nu\left[1+e^{-(y-\mu)/\nu}\right]^2} \\ &= (4\nu)^{-1}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\nu}\right)\right], \quad y \in I\!R \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\mu \in I\!R$ e $\nu > 0$ são, respectivamente, os parâmetros de locação e escala.

2.7.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da distribuição logística é dada por

$$\begin{aligned} F(y) &= \left[1+e^{-(y-\mu)/\nu}\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1+\tanh\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\nu}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

2.7.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da distribuição logística é calculada utilizando-se a transformação $Z = \frac{Y-\mu}{\nu}$ em (2.1) e, portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-t)z}(1+e^{-z})^{-2}dz \\ &= \int_0^1 \theta^{-t}(1-\theta)^t d\theta, \quad [\theta = (e^z+1)^{-1}] \\ &= B(1-t, 1+t) \\ &= \pi t \operatorname{cosec} \pi t. \end{aligned}$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y) = \mu$ e $V(Y) = \pi^2\nu^2/3$.

2.7.5 Função Característica

Para obtenção da função característica da distribuição logística, o método é análogo ao da função geradora de momentos e isto implica que

$$\phi_Z(t) = B(1-it, 1+it) = \pi t \operatorname{cosech} \pi t.$$

2.8 Modelo de Weibull

2.8.1 Importância e aplicação

A distribuição de Weibull foi proposta pelo físico sueco Waloddi Weibull, em 1939, para representar a distribuição da resistência de materiais e, em 1951, para várias outras aplicações. Atualmente vem sendo bastante utilizada para análise de tempos de vida devido à sua flexibilidade em poder imitar o comportamento de outras distribuições estatísticas, tais como, a normal e a exponencial.

2.8.2 Função Densidade de Probabilidade

A variável aleatória Y segue o modelo de Weibull se sua função densidade for definida como

$$f(y;\gamma,\alpha) = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right], \quad y,\, \alpha, \gamma > 0, \tag{2.2}$$

em que γ é o parâmetro de forma e α o parâmetro de escala. Para $\gamma = 2$ tem-se a distribuição de Rayleigh. Para $\gamma > 1$ a função densidade (2.2) tende a zero quando $y \to 0$ e para $0 < \gamma \leq 1$ ela é uma função decrescente de y a partir da moda zero.

2.8.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da Weibull é dada por

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right].$$

2.8.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da Weibull é dada por

$$M_Y(t) = \alpha^t \Gamma\left(\frac{t}{\gamma} + 1\right).$$

Logo, a média e variância são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right), \\ V(Y) &= \alpha^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\gamma} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)^2\right]. \end{aligned}$$

2.8.5 Função Característica

A função característica da Weibull é dada por

$$\phi_Y(t) = \alpha^{it} \Gamma\left(\frac{it}{\gamma} + 1\right).$$

2.9 Modelo Normal

2.9.1 Importância e aplicação

A distribuição normal ou Gaussiana é a mais importante da Estatística face às suas inúmeras aplicações e por constituir uma aproximação razoável para um grande número de distribuições de interesse (CORDEIRO, 1992). No início do século XIX, sua importância teórica foi disseminada através dos trabalhos de Laplace e Gauss.

A distribuição normal, também conhecida como a "curva em forma de sino", tem sua origem associada aos erros de mensuração. É sabido que, quando se efetuam repetidas mensurações de determinada grandeza com um aparelho equilibrado, não se chega ao mesmo resultado todas as vezes; obtém-se, ao contrário, um conjunto de valores que oscilam, de modo aproximadamente simétrico, em torno do verdadeiro valor. Gauss deduziu matematicamente a distribuição normal como distribuição de probabilidade dos erros de observação, denominando-a então "lei normal dos erros".

Sabe-se que não são poucos os exemplos de fenômenos da vida real representados por distribuições não-normais, curvas assimétricas, por exemplo. Mesmo assim, a distribuição normal desempenha papel preponderante na estatística, e os processos de inferência nela baseados têm larga aplicação.

2.9.2 Função Densidade de Probabilidade

A variável aleatória Y, que tome todos os valores reais $-\infty < y < \infty$, tem uma distribuição normal se sua função densidade for

$$f(y;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

em que μ é o parâmetro de locação, igual à média, e σ é o desvio padrão e satisfazem as condições $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ tem-se a distribuição normal padrão.

2.9.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da distribuição normal pode ser expressa em termos da *função erro* erf como segue:

$$F(y) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

2.9.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da distribuição normal é dada por

$$M_Y(t) = \exp(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2).$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y) = \mu$ e $V(Y) = \sigma^2$.

2.9.5 Função Característica

A função característica da distribuição normal é dada por

$$\phi_Y(t) = \exp(\mu i t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2).$$

2.10 Modelo Qui-Quadrado

2.10.1 Importância e aplicação

Gauss, em 1816, escreveu em um dos seus artigos em *geodetics* (o ramo da matemática aplicada que determina a forma e a área de grandes extensões de terra, a posição exata de pontos geográficos e, a curvatura, a forma e as dimensões da Terra), uma derivação da distribuição assintótica da qui-quadrado ($\nu \to \infty$), que é a já conhecida distribuição normal com média ν e desvio padrão $\sqrt{2\nu}$. A distribuição qui-quadrado também apareceu em Pearson (1900), no artigo *"On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling"*, como a distribuição aproximada para as estatísticas qui-quadrado utilizadas para diversos testes em tabelas de contingência.

A distribuição qui-quadrado é uma das distribuições mais utilizadas em estatística inferencial, isto é, em testes de hipóteses. Ela é útil porque, sob hipóteses razoáveis, pode ser provado facilmente que a distribuição das quantidades calculadas se aproximam à distribuição qui-quadrado se a hipótese nula é verdadeira.

2.10.2 Função Densidade de Probabilidade

Seja X_i $(i = 1, \ldots, n)$ variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média 0 e variância 1, então a variável aleatória

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é distribuída de acordo com a distribuição qui-quadrado, representada por

$$Y \sim \chi_n^2.$$

A distribuição qui-quadrado tem apenas um parâmetro: n - um número inteiro positivo que especifica o número de graus de liberdade.

Assim, a função densidade da distribuição qui-quadrado é dada por

$$f(y) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}\, y^{\frac{n}{2}-1}\, \exp(-\frac{y}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad y \geq 0.$$

2.10.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada da qui-quadrado é dada por

$$F(y) = \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad y > 0,$$

em que $\gamma(a, y) = \int\limits_0^y t^{a-1} e^{-t} dt.$

2.10.4 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos da qui-quadrado é

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{n/2}, \quad t < 1/2.$$

Logo, a média e variância são, respectivamente, $E(Y) = n$ e $V(Y) = 2n$.

2.10.5 Função Característica

A função característica da qui-quadrado é

$$\phi_Y(t) = (1 - 2it)^{n/2}, \quad t < 1/2.$$

3 Estimação Bayesiana

Segundo Box e Tiao (1992), opinar sobre a importância do Teorema de Bayes para a inferência estatística, o tem colocado entre aceitação e rejeição desde a sua publicação em 1763. Durante anos os fundamentos da inferência Bayesiana foram vistos, de forma interessante, mas como uma tentativa errada de resolver um problema importante. Porém, o interesse no modo de raciocínio de Bayes tem aumentado em razão dos trabalhos de diversos autores como Fisher, Jeffreys, Barnard, Ramsey, De Finetti, Savage, Lindley, Anscombe e Stein, que contribuíram para tornar mais claro e ultrapassar algumas das dificuldades filosóficas e práticas.

A investigação científica utiliza métodos estatísticos em que controla a coleta e análise de dados, alternadamente. A análise dos dados consiste em críticas à inferência condicional pela análise de resíduos e de outras medidas. A inferência estatística, portanto, é apenas uma das atribuições do estatístico e representa um passo importante. A inferência Bayesiana por si só parece oferecer a possibilidade de uma flexibilidade suficiente para permitir uma reação à complexidade científica livre de impedimento de natureza puramente técnica.

A distribuição *à priori*, que representa o que se sabe sobre os parâmetros desconhecidos dos dados disponíveis, desempenha um papel importante na análise Bayesiana. Essa distribuição pode ser utilizada para representar conhecimento prévio ou ignorância relativa. Nos problemas de inferência científica, o ideal seria, se possível, que os dados "falassem por si". Por conseguinte, essa distribuição, geralmente, é adequada para realizar a análise, como se existisse um estado de relativa ignorância *a priori*. No entanto, é compreensível a apreensão sentida por alguns estatísticos sobre o uso de distribuições priori, que muitas vezes são associadas com o receio de que a priori possa dominar e distorcer "aquilo que os dados estão tentando dizer" (BOX; TIAO, 1992).

3.1 O Teorema de Bayes

Seja $y' = (y_1, \ldots, y_n)$ um vetor de n observações cuja distribuição de probabilidade $p(y|\theta)$ depende dos valores de k parâmetros $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Suponha que θ tem uma distribuição de probabilidade $p(\theta)$. Então,

$$p(y|\theta)p(\theta) = p(y, \theta) = p(\theta|y)p(y).$$

Dado y observado, a distribuição condicional de θ é

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}. \tag{3.1}$$

Também, pode-se escrever

$$p(y) = E[p(y|\theta)] = c^{-1} = \begin{cases} \int p(y|\theta)p(\theta)d\theta, & se \quad \theta \quad \text{é contínuo;} \\ \sum p(y|\theta)p(\theta), & se \quad \theta \quad \text{é discreto,} \end{cases}$$

em que a soma ou a integral é tomada no intervalo de admissibilidade de θ e $E[f(\theta)]$ é a esperança matemática de $f(\theta)$ no que diz respeito a distribuição de $p(\theta)$. Outra forma de escrever (3.1) é

$$p(\theta|y) = c\,p(y|\theta)p(\theta). \tag{3.2}$$

A condição em (3.1), ou em (3.2), é referido como Teorema de Bayes. Nesta expressão, $p(\theta)$, que representa o que é conhecido à respeito de θ sem o conhecimento dos dados, é chamada de distribuição *priori* de θ. Correspondentemente, $p(\theta|y)$, que representa o que é conhecido à respeito de θ dado o conhecimento dos dados, é chamada distribuição *posteriori* de θ dado y. A quantidade c é simplesmente uma constante de "normalização" necessária para assegurar-se de que a distribuição posteriori $p(\theta|y)$ integrada ou somada (em caso discreto) é 1.

O Teorema de Bayes, também, pode ser representado não por uma função de y, mas de θ, através da função de verossimilhança de θ dado y, ou seja, $l(\theta|y)$ e, portanto, (3.2) pode ser escrito como

$$p(\theta|y) = l(\theta|y)p(\theta). \tag{3.3}$$

Isso significa que o Teorema de Bayes retrata que a distribuição de probabilidade posteriori de θ dado y é proporcional ao produto da distribuição priori de θ e verossimilhança de θ dado y . Isto é,

$$\text{distribuição posteriori} \propto \text{verossimilhança} \times \text{distribuição priori.}$$

Segundo Box e Tiao (1992), a função de verossimilhança $l(\theta|y)$ desempenha um papel muito importante na fórmula de Bayes, pois ela é a função pela qual y modifica o conhecimento *a priori* de θ. Esta função pode ser considerada como a representação da informação sobre θ que vem dos dados.

Tem-se, também, que (3.3) permite atualizar continuamente a informação sobre θ à medida que mais dados são observados.

Assim, suponha uma amostra inicial de observações y_1, então a fórmula de Bayes é

$$p(\theta|y_1) \propto p(\theta)l(\theta|y_1).$$

Agora, suponha uma segunda amostra de observações y_2, distribuída independentemente da primeira, então

$$\begin{aligned} p(\theta|y_2, y_1) &\propto p(\theta)l(\theta|y_1)l(\theta|y_2) \\ &\propto p(\theta|y_1)l(\theta|y_2). \end{aligned}$$

Obviamente este processo pode ser repetido inúmeras vezes, ou seja, se há n observações independentes, a distribuição posteriori poderá ser calculada a cada nova observação, então no m-ésimo estágio a verossimilhança associada com a m-ésima observação é combinada com a distribuição posteriori de θ após $m-1$ observações, gera uma nova distribuição posteriori

$$p(\theta|y_1, \ldots, y_m) \propto p(\theta|y_1, \ldots, y_{m-1})l(\theta|y_m), \quad m = 2, \ldots, n.$$

3.2 Distribuições Priori Não-informativas

Para identificar qual distribuição priori deve ser aplicada aos parâmetros de uma distribuição, sem que haja um conhecimento prévio sobre a mesma, e que gere os resultados esperados quando da realização de um experimento, alguns métodos são apresentados a seguir.

3.2.1 Verossimilhança de dados transladados

Segundo Box e Tiao (1992), se $\phi(\theta)$ é uma transformação um a um de θ, pode-se dizer que uma distribuição a priori de θ, que é localmente proporcional a $|d\phi/d\theta|$, é não-informativa para o parâmetro θ se, em termos de ϕ, a curva de verossimilhaça apresenta os dados transladados, isto é, os dados servem apenas para trocar a locação da verossimilhança $l(\phi|y)$. Matematicamente, uma verossimilhança de dados transladados será da forma

$$l(\theta|y) = g[\phi(\theta) - f(y)], \tag{3.4}$$

em que $g(.)$ é uma função conhecida, independente de y, e $f(y)$ é a função de y.

Porém, como esperado, uma transformação que permite que a verossimilhança seja expressa exatamente como em (3.4), geralmente, não está disponível. No entanto, para amostras de tamanho moderado, devido à insensibilidade da distribuição posteriori a pequenas alterações na priori, é necessário uma transformação $\phi(\theta)$, em termos de que a verossimilhança seja aproximadamente transladada pelos dados. Ou seja, a verossimilhança para ϕ é quase independente de y, exceto por sua locação.

3.2.2 Método de Jeffreys

A classe de prioris não informativas proposta por Sir Harold Jeffreys (1961), em sua publicação intitulada *"Theory of Probability"*, é invariante a transformações um a um, embora, em geral, seja imprópria e será definida a seguir. Antes porém precisamos da definição da medida de informação de Fisher (BOX; TIAO, 1992; EHLERS, 2003).

Considere uma única observação Y com função densidade de probabilidade $p(y|\theta)$. A medida de informação esperada de Fisher de θ através de Y é definida como

$$I(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 \log p(y|\theta)}{\partial\theta^2}\right].$$

Se θ for um vetor paramétrico define-se, então, a matriz de informação esperada de Fisher de θ através de Y como

$$I(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 \log p(y|\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right].$$

> O conceito de informação, aqui, está sendo associado a uma espécie de curvatura média da função de verossimilhança no sentido de que quanto maior a curvatura, mais precisa é a informação contida na verossimilhança, ou equivalentemente, maior o valor de $I(\theta)$. Em geral, espera-se que a curvatura seja negativa e por isso seu valor é tomado com sinal trocado. Note, também, que a esperança matemática é tomada em relação à distribuição amostral. (EHLERS, 2003)

Definindo-se, então, o método de Jeffreys tem-se que: A distribuição priori de um parâmetro θ é aproximadamente não-informativa se for tomado como proporcional à raiz quadrada da informação de Fisher (BOX; TIAO, 1992). Portanto, a priori não informativa de Jeffreys tem função de densidade dada por

$$p(\theta) \propto [I(\theta)]^{1/2}.$$

Se θ for um vetor paramétrico tem-se

$$p(\theta) \propto |\det I(\theta)|^{1/2}.$$

4 Modelos Exponencializados

Para análise de dados de vida as distribuições de probabilidade mais utilizadas são a gama e a Weibull. Ambas distribuições apresentam desvantagens e uma delas é que a função de distribuição ou função de sobrevivência da gama não é facilmente calculada se o parâmetro de forma não é inteiro. Neste caso, torna-se necessário a aplicação de técnicas de integração numérica, o que faz a gama impopular quando comparada a Weibull.

A distribuição de Weibull foi proposta pelo físico sueco de mesmo nome, em 1939, para representar a distribuição da resistência de materiais e vem se tornando popular para análise de tempos de vida, porque na presença de censura é muito mais fácil de tratar, pelo menos numericamente, quando comparada à gama. Porém uma de suas desvantagens é que a convergência assintótica para a normalidade da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança é muito lenta (GUPTA; KUNDU, 2001a).

4.1 Distribuição Exponencial Exponencializada

Com o objetivo de reunir as características das distribuições gama e Weibull, Gupta e Kundu (1999) propuseram a Distribuição Exponencial Exponencializada (EE). Portanto, Y é uma variável aleatória do tipo EE bi-paramétrica se definida como segue:

função de distribuição

$$F_E(y;\alpha,\lambda) = (1 - e^{-\lambda y})^{\alpha}, \quad \alpha, \lambda, y > 0. \tag{4.1}$$

função densidade

$$f_E(y;\alpha,\lambda) = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda y})^{\alpha-1} e^{-\lambda y}. \tag{4.2}$$

função de sobrevivência

$$S_E(y;\alpha,\lambda) = 1 - F_E(y;\alpha,\lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda y})^{\alpha}.$$

e função de risco

$$h_E(y;\alpha,\lambda) = \frac{f_E(y;\alpha,\lambda)}{S_E(y;\alpha,\lambda)} = \frac{\alpha\lambda(1-e^{-\lambda y})^{\alpha-1}e^{-\lambda y}}{1-(1-e^{-\lambda y})^{\alpha}},$$

em que α é o parâmetro de forma e λ é o parâmetro de escala. Quando $\alpha = 1$, tem-se a distribuição exponencial. Além disso, segundo Kundu (2004), a distribuição EE é definida como um caso particular da função de distribuição Gompertz-Verhulst, definida abaixo, quando $\rho = 1$:

$$G(t) = (1-\rho e^{-t\lambda})^{\alpha}; \quad \text{se} \quad t > \frac{1}{\lambda}\log\rho, \quad \rho, \alpha \,\text{e}\, \lambda \,\text{números reais positivos.}$$

Com relação à taxa de risco da EE, ela apresenta as mesmas características da gama. Então, se os dados são de um ambiente de manutenção regular é mais sensato utilizar a distribuição gama ou EE do que a Weibull (ver Tabela 1). Também, segundo Gupta e Kundu (2002), uma das vantagens dessa distribuição é que devido a estrutura simples de suas funções de distribuição e sobrevivência, a EE pode ser usada de forma eficaz na análise de dados de tempo de vida, particularmente, na presença de censura ou dados agrupados.

Tabela 1: Comparação das funções de risco

	Função de risco		
Parâmetros	gama	Weibull	EE
$\alpha = 1$	Constante	Constante	Constante
$\alpha > 1$	Crescente de 0 a λ	Crescente de 0 a ∞	Crescente de 0 a λ
$\alpha < 1$	Decrescente de ∞ a λ	Decrescente de ∞ a 0	Decrescente de ∞ a λ

Gupta e Kundu (2001a) calcularam os momentos da distribuição EE por

$$E(Y^k) = \frac{\alpha\Gamma(k+1)}{\lambda^k}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i c(\alpha-1,i)\frac{1}{(i+1)^{k+1}}, \tag{4.3}$$

em que $c(\alpha-1,i) = \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-i)}{i!}$.

Dado que (4.3) é uma série convergente para qualquer $k \geq 0$, então, todos os momentos existem e para valores inteiros de α, (4.3) pode ser representada como uma série finita. Logo, a média da distribuição EE é

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i c(\alpha-1,i)\frac{1}{(i+1)^2},$$

e o segundo momento é

$$E(Y^2) = \frac{2\alpha}{\lambda^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i c(\alpha-1,i)\frac{1}{(i+1)^3}.$$

Também, pode-se expressar os diferentes momentos da distribuição EE através da função geratriz dos momentos $M(t)$ de Y para $0 < t < \lambda$, em termos da função gama. Tem-se,

$$M(t) = E(e^{tY}) = \alpha\lambda\int_0^{\infty}(1-e^{-\lambda y})^{\alpha-1}e^{(t-\lambda)y}dy. \tag{4.4}$$

Fazendo a substituição $z = e^{-\lambda y}$, (4.4) reduz-se a

$$M(t) = \alpha\int_0^1(1-z)^{\alpha-1}z^{-\frac{t}{\lambda}}dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha-\frac{t}{\lambda}+1)}$$

Diferenciando $\log[M(t)]$ e avaliando em $t = 0$, tem-se que a média e a variância de Y são

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}[\psi(\alpha+1)-\psi(1)] \quad \text{e} \quad \mathrm{var(Y)} = \frac{1}{\lambda^2}[\psi'(1)-\psi'(\alpha+1)],$$

em que $\psi(.)$ é a função digama e $\psi'(.)$ é sua derivada. Momentos centrais de ordem superior podem ser obtidas em termos de funções poligamas.

Além dos momentos centrais, também, tem-se outras medidas de posição tais como: a moda que é igual ao $\log\alpha$ para $\alpha > 1$ e 0 para $\alpha \leq 1$, e a mediana cujo valor é $-\log[1-(1/2)^{\frac{1}{\alpha}}]$. Estes valores são válidos quando $\lambda = 1$. A média, mediana e moda são funções não-lineares do parâmetro de forma e quando o parâmetro de forma tende a infinito, todas essas medidas, também, tendem a infinito. Para valores grandes de α, a média, a mediana e a moda são, aproximadamente, iguais ao $\log\alpha$, mas elas convergem para taxas diferentes (GUPTA; KUNDU, 2007).

Com relação as medidas de assimetria e curtose da EE, as mesmas podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2},$$

em que μ_2, μ_3 e μ_4 são o segundo, terceiro e quarto momentos centrais, respectivamente. Essas medidas são independentes do parâmetro de forma.

A função de log-verossimilhança pode ser escrita como

$$l(\alpha, \lambda) = n \log \alpha + n \log \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda y_i}) - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{4.5}$$

Logo, para calcular as estimativas de máxima verossimilhança (EMV) de α e λ, maximiza-se (4.5) com relação aos parâmetros e obtém-se o resultado de que a EMV de α como função de λ é

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left(1 - e^{-\lambda y_i}\right)}.$$

Mais detalhes sobre as EMV da distribuição EE podem ser encontrados em Gupta e Kundu (1999, 2001a, 2001b, 2002). Além do método de máxima verossimilhança para obtenção das estimativas dos parâmetros tem-se, também, o método dos momentos, estimadores percentis, mínimos quadrados e estimadores L-momentos que estão descritos em Gupta e Kundu (2007).

Em relação a intervalos de confiança e testes de hipóteses, Gupta e Kundu (2002) propõem o uso do teste da razão de verossimilhanças (RV) e os resultados de normalidade assintótica quando ambos os parâmetros são desconhecidos. Se o parâmetro de escala é conhecido, então existe um teste uniformemente mais poderoso (UMP) ou uniformemente mais poderoso não viesado (UMPNV), dependendo das alternativas. Os diferentes casos serão analisados separadamente. Primeiro considera-se que ambos os parâmetros são desconhecidos e depois o caso no qual um dos parâmetros é conhecido.

- Ambos os parâmetros são desconhecidos

Testa-se o parâmetro de forma α, quando o parâmetro de escala também é desconhecido, ou seja, $H_0 : \alpha = \alpha_0$ versus $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$. Neste caso não é possível obter um teste UMP ou um teste UMPNV. A proposta então é utilizar a RV $W_1 = 2[l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) - l(\alpha_0, \tilde{\lambda})]$, em que $\tilde{\lambda}$ é a EMV restrita de λ quando $\alpha = \alpha_0$ e, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ são as estimarivas irrestritas de α e λ, respectivamente. Para amostras grandes, a distribuição de W_1 sob H_0 é, aproximadamente, χ^2_1. Um intervalo de confiança ao nível de $(1 - \gamma)100\%$ de confiança consiste em um conjunto de valores α_0 tal que $W_1(\alpha_0) \leq \chi^2_{1,1-\gamma}$, em que $\chi^2_{1,1-\gamma}$ é o $100(1 - \gamma)\%$ da χ^2_1. Também, pode-se usar os resultados de normalidade assintótica para as EMV (ver Gupta e Kundu, 2002) para construir intervalos de confiança aproximados ou testes de hipóteses.

No caso do parâmetro de escala λ, o teste de hipótese é similar ao do parâmetro de forma, α, ou seja, as hipóteses são $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. A estatística da

RV é $W_2 = 2[l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) - l(\tilde{\alpha}, \lambda_0)]$, em que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ são as EMV de α e λ, respectivamente, $\tilde{\alpha}$ é o EMV restrito de α quando $\lambda = \lambda_0$ e pode-se aproximar W_2 sob H_0 por uma χ_1^2 para n grande. A construção do intervalo de confiança de λ é similar ao de α ou pode-se utilizar os resultados da normalidade assintótica para o teste de hipótese acima.

Também, podemos testar simultâneamente α e λ. As hipóteses são $H_0 : \alpha = \alpha_0,\ \lambda = \lambda_0$ versus H_1 : pelo menos um não é verdadeiro. A estatística da RV é $W_3 = 2[l(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) - l(\alpha_0, \lambda_0)]$. Neste caso, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ também são as EMV de α e λ, respectivamente. Para n grande, a distribuição de W_3 sob H_0 é, aproximadamente, χ_2^2 e, também, é possível usar os resultados da normalidade assintótica para o teste de hipótese acima.

- Parâmetro de escala é conhecido

Agora considera-se o teste de hipótese para o parâmetro de forma quando o parâmetro de escala é conhecido. Suponha o teste de uma das seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha = \alpha_0, \qquad H_1 : \alpha \neq \alpha_0; \\ H_0 &: \alpha = \alpha_0, \qquad H_1 : \alpha < \alpha_0; \\ H_0 &: \alpha = \alpha_0, \qquad H_1 : \alpha > \alpha_0. \end{aligned}$$

Considere a última hipótese. Desde que λ é conhecido, pode-se assumir $\lambda = 1$. O teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ versus $H_1 : \alpha > \alpha_0$ é realizado da seguinte forma: Rejeita-se H_0 se $\prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-y_i}) > c$ e aceita-se caso contrário.

Sabe-se que esse teste é equivalente a (ver Gupta e Kundu, 2002)

$$U = \left[\frac{\alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-y_i})}{\sqrt{n}}\right] + \sqrt{n} > c$$

e que sua distribuição sob H_0 é a mesma de

$$U = -\frac{X}{\sqrt{n}} + \sqrt{n},$$

em que $2X$ tem distribuição χ_{2n}^2, portanto tem-se

$$2X = -2\alpha \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-y_i})$$

que pode ser usado como uma quantidade pivotal para obter o intervalo de confiança de

α. Logo, quando λ é conhecido, o intervalo de confiança ao nível de 95% para α é:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n,.025}}{-2\sum_{i=1}^n \log(1-e^{-y_i})}, \frac{\chi^2_{2n,.975}}{-2\sum_{i=1}^n \log(1-e^{-y_i})}\right],$$

em que $\chi^2_{2n,.975}$ e $\chi^2_{2n,.025}$ são os quantis 97,5% e 2,5% da distribuição χ^2_{2n}. Para n grande, a distribuição de U pode ser aproximada pela normal padrão.

Como já foi dito anteriormente, as funções de distribuição e densidade da distribuição EE apresentam similaridades com as correspondentes funções das distribuições gama e Weibull. Comparando a distribuição EE com a gama tem-se que, segundo Gupta e Kundu (2004), em muitas situações a distribuição exponencial exponencializada fornece melhor ajustamento que a distribuição gama.

Uma outra situação possível está descrita em Kundu e Gupta (2005). Suponha que X é a resistência de um componente que está sujeito a uma tensão Y, sendo R a medida da performance do sistema e surge em um contexto de reabilitação mecânica do mesmo. O sistema falha se e somente se em qualquer tempo a tensão aplicada for maior que a resistência. Então, com o intuito de inferir sobre $R = P(Y < X)$, em que $Y \sim EE(\alpha, \lambda)$, $X \sim EE(\beta, \lambda)$ e são independentemente distribuídas, primeiramente obtém-se a EMV de R e sua distribuição assintótica.

Desenvolvendo a igualdade $R = P(Y < X)$ obtém-se que seu valor é $\beta/(\alpha+\beta)$ e obtendo-se a log-verossimilhança na amostra observada chega-se as seguintes EMV:

$$\hat{\alpha} = -\frac{m}{\sum\limits_{i=1}^{m} \log\left(1-e^{-\hat{\lambda} y_i}\right)}, \quad \hat{\beta} = -\frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \log\left(1-e^{-\hat{\lambda} x_j}\right)},$$

e $\hat{\lambda}$ pode ser obtido como a solução da equação não-linear da forma $h(\lambda) = \lambda$, em que

$$h(\lambda) = (m+n)\Bigg[\ \frac{n}{\sum_{k=1}^n \log(1-e^{-\lambda X_k})} \times \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j e^{-\lambda X_j}}{(1-e^{-\lambda X_j})} + \frac{m}{\sum_{k=1}^m \log(1-e^{-\lambda Y_k})} \times \sum_{i=1}^{m} \frac{Y_i e^{-\lambda Y_i}}{(1-e^{-\lambda Y_i})} + \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{(1-e^{-\lambda X_j})} + \sum_{i=1}^{m} \frac{Y_i}{(1-e^{-\lambda Y_i})}\Bigg]^{-1}$$

Calculando $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, a EMV de R é $\hat{R} = \hat{\beta}/(\hat{\alpha}+\hat{\beta})$, e a distribuição de R é, assintoticamente, normal. A expressão da variância assintótica pode ser encontrada em Kundu e Gupta (2005).

Admitindo $\lambda = 1$ tem-se

$$\hat{R} = \frac{n \sum_{i=1}^{m} \log\left(1 - e^{-y_i}\right)}{n \sum_{i=1}^{m} \log\left(1 - e^{-y_i}\right) + m \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 - e^{-x_j}\right)}.$$

Gupta e Kundu (2002) mostram que

$$-2\beta \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 - e^{-x_j}\right) \sim \chi^2_{2n} \quad \text{e} \quad -2\alpha \sum_{i=1}^{m} \log\left(1 - e^{-y_i}\right) \sim \chi^2_{2m}$$

Logo,

$$\hat{R} \stackrel{d}{=} \frac{V}{V + cU} \stackrel{d}{=} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\beta} Z}, \quad \text{ou} \quad \frac{R}{1 - R} \times \frac{1 - \hat{R}}{\hat{R}} \stackrel{d}{=} Z,$$

sendo que $\stackrel{d}{=}$ indica equivalente em distribuição e $c = \frac{m\alpha}{n\beta}$. As variáveis aleatórias U e V são independentes e têm distribuição χ^2 com $2n$ e $2m$ graus de liberdade, respectivamente. Além disso, Z tem distribuição F com $2n$ e $2m$ graus de liberdade e a função de distribuição de $\hat{R}$ é obtida de

$$f_{\hat{R}}(x) = k \times \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{n\beta(1-x)}{m\alpha x}\right)^{m+n}}, \quad 0 < x < 1,$$

em que

$$k = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \left(\frac{n}{m}\right)^{n}.$$

O intervalo de confiança a 100(1-γ)% de R pode ser obtido como

$$\left[\frac{1}{1 + F_{2m,2n;1-\frac{\gamma}{2}} \times \left(\frac{1}{\hat{R}} - 1\right)}, \frac{1}{1 + F_{2m,2n;\frac{\gamma}{2}} \times \left(\frac{1}{\hat{R}} - 1\right)}\right],$$

em que $F_{2m,2n;\frac{\gamma}{2}}$ e $F_{2m,2n;1-\frac{\gamma}{2}}$ são os percentis $\frac{\gamma}{2}\%$ inferior e superior da distribuição F com $2m$ e $2n$ graus de liberdade.

4.2 Distribuição de Fréchet Exponencializada

A distribuição de Fréchet Exponencializada (FE) generaliza a distribuição de Fréchet da mesma forma que (4.1) generaliza a distribuição exponencial. Sabendo que a distribuição de Fréchet tem função de distribuição

$$F(y) = e^{-(\sigma/y)^{\lambda}}$$

para $y > 0$, $\sigma > 0$ e $\lambda > 0$, então a nova distribuição será definida com o parâmetro adicional α pela função de distribuição acumulada (f.d.a.)

$$G(y) = e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}} \tag{4.6}$$

para $\alpha > 0$.

A função densidade é

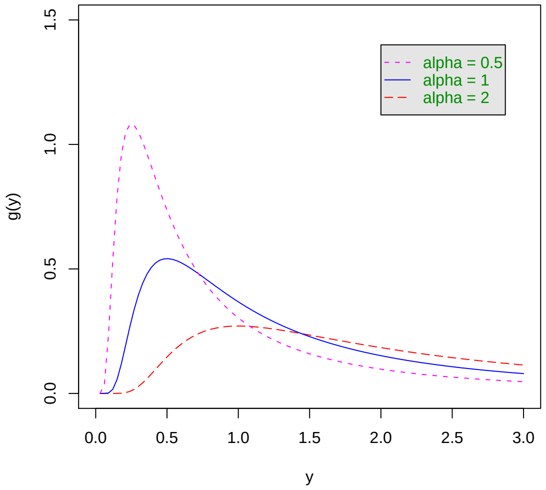
$$g(y) = \alpha\lambda\sigma^{\lambda}e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}}y^{-(1+\lambda)}, \tag{4.7}$$

e quando $\alpha = 1$ tem-se a distribuição original. A Figura 1(a) ilustra algumas das possíveis formas da f.d.p. da FE para valores selecionados de α e $\sigma = 1$ e $\lambda = 1$.

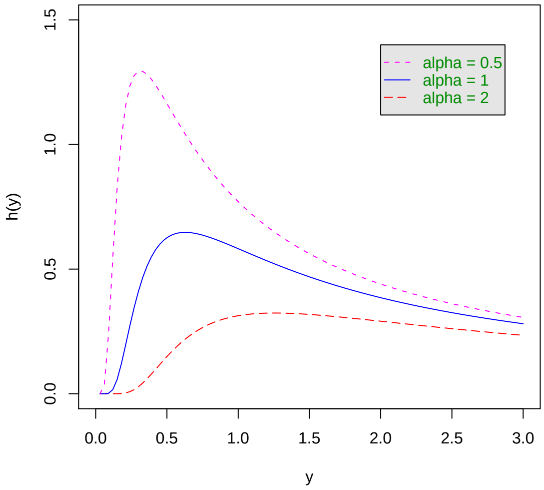
A função de risco é definida como sendo

$$h(y) = \frac{\alpha\lambda\sigma^{\lambda}y^{-(1+\lambda)}e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}}}{1 - e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}}}. \tag{4.8}$$

A Figura 1(b) ilustra algumas das possíveis formas da função de risco da FE para valores selecionados de α e $\sigma = 1$ e $\lambda = 1$.



(a) F.d.p. da distribuição FE.



(b) Função de risco da distribuição FE.

Figura 1: Função densidade e Função de risco da distribuição de Fréchet exponencializada para valores selecionados de α e $\sigma = 1$ e $\lambda = 1$.

Os momentos da distribuição FE são dados por

$$E(Y^r) = \int_0^{\infty} y^r\alpha\lambda\sigma^{\lambda}e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}}y^{-(1+\lambda)}dy. \tag{4.9}$$

Substituindo $z = (\sigma/y)^\lambda$, (4.9) reduz-se a

$$E(Y^r) = \alpha\sigma^r \int_0^\infty z^{r/\lambda} e^{-\alpha z} dz. \tag{4.10}$$

Para obtenção da EMV, a log-verossimilhança de uma amostra aleatória $y_1, \ldots, y_n$ de (4.7) é

$$l(\sigma, \alpha, \lambda) = n \, \log(\alpha\lambda\sigma^\lambda) + \alpha\sigma^\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i^{-\lambda} - (1+\lambda) \sum_{i=1}^{n} \log y_i.$$

4.3 Distribuição de Rayleigh Exponencializada

Para $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, a distribuição de Rayleigh Exponencializada (RE) tem f.d.a.:

$$G(y; \alpha, \lambda) = [1 - e^{-(\lambda y)^2}]^\alpha, \quad y > 0.$$

função densidade

$$g(y; \alpha, \lambda) = 2\alpha\lambda^2 y e^{-(\lambda y)^2} [1 - e^{-(\lambda y)^2}]^{\alpha - 1}, \quad y > 0.$$

função de sobrevivência

$$S(y; \alpha, \lambda) = 1 - [1 - e^{-(\lambda y)^2}]^\alpha, \quad y > 0.$$

e a função de risco

$$h(y; \alpha, \lambda) = \frac{2\alpha\lambda^2 y e^{-(\lambda y)^2} [1 - e^{-(\lambda y)^2}]^{\alpha-1}}{1 - [1 - e^{-(\lambda y)^2}]^\alpha},$$

em que α e λ são os parâmetros de forma e escala, respectivamente. A distribuição RE é denotada por $RE(\alpha, \lambda)$. É observado em Kundu e Raqab (2005) que para $\alpha \leq \frac{1}{2}$, a função densidade RE é uma função decrescente e possui assimetria unimodal à direita para $\alpha > \frac{1}{2}$. A função de risco, para $\alpha \leq \frac{1}{2}$, é do tipo U ou banheira e para $\alpha > \frac{1}{2}$, é uma função crescente. A distribuição RE pode ser utilizada em modelagem de dados de força e, também, em dados de tempo de vida em geral.

Considerando uma amostra aleatória de tamanho n proveniente de uma $RE(\alpha, \lambda)$, sendo ambos os parâmetros desconhecidos, a log-verossimilhança é dada por

$$l(\alpha, \lambda) = C + n \, \log \, \alpha + 2n \, \log \, \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log \, y_i - \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \log \, [1 - e^{-(\lambda y)^2}]$$

e a EMV de α como função de λ, $\hat{\alpha}(\lambda)$ é

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left[1 - e^{-(\lambda y)^2}\right]}.$$

Maiores detalhes sobre as EMVs e outros métodos de estimação estão em Kundu e Raqab (2005).

4.4 Distribuição de Weibull Exponencializada

"Proposta por Mudholkar" (CHOUDHURY, 2005), a função densidade da Weibull Exponencializada é

$$g(y) = \frac{c\theta}{\alpha}\left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\right]^{\theta-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c-1}, \; y > 0, \alpha > 0, c > 0, \theta > 0. \tag{4.11}$$

A vantagem dessa expressão é que a mesma pode ser utilizada para determinar momentos sem qualquer restrição ou condição nos parâmetros (CHOUDHURY, 2005). Se $\theta = 1$ tem-se a distribuição de Weibull e se $c = \theta = 1$, tem-se a distribuição exponencial. A função de risco é dada por

$$h(y) = \frac{c\,\theta\left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\right]^{\theta-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c-1}}{\alpha\left\{1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\right]^{\theta}\right\}}.$$

Mudholkar, também, propôs o seguinte teorema sobre a forma gráfica da função de risco:

Teorema 4.4.1. *Para a família Weibull exponencializada (4.11), a função de risco é:*
(a) forma de banheira, se $c > 1$ e $c\theta < 1$;
(b) unimodal, se $c < 1$ e $c\theta > 1$;
(c) monótona crescente, se $c \geq 1$ e $c\theta \geq 1$;
(d) monótona descrescente, se $c \leq 1$ e $c\theta \leq 1$.

Além disso, as monotonicidades são estritas exceto para a distribuição exponencial correspondente a $c = \theta = 1$.

Os momentos da distribuição EW são citados, mas não calculados, por (NADARAJAH; KOTZ, 2006):

$$E(Y^n) = \theta c \alpha^{-c}\int_0^{\infty} y^{n+c-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c\right]\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c\right]\right\}^{\theta-1} dy.$$

4.5 Distribuição Gama Exponencializada

Definida por Nadarajah e Kotz (2006), a f.d.a. da gama exponencializada (GE), que generaliza a distribuição gama padrão, é dada por

$$G(y) = \left[\frac{\gamma(a,y)}{\Gamma(a)}\right]^{\alpha}, \tag{4.12}$$

em que $y > 0$, $a > 0$ e $\alpha > 0$.

A função densidade correspondente é

$$g(y) = \frac{\alpha y^{a-1}\exp(-y)}{\Gamma(a)}\left[\frac{\gamma(a,y)}{\Gamma(a)}\right]^{\alpha-1}. \tag{4.13}$$

Se $a = 1$, então (4.13) reduz-se à função densidade da EE em (4.2) com $\lambda = 1$. De forma geral, se a é um inteiro positivo , então (4.12) e (4.13) podem ser simplificadas para

$$G(y) = \left[1 - \left(\sum_{m=0}^{a-1}\frac{y^m}{m!}\right)\exp(-y)\right]^{\alpha}$$

e

$$g(y) = \frac{\alpha y^{a-1}\exp(-y)}{(a-1)!}\left[1 - \left(\sum_{m=0}^{a-1}\frac{y^m}{m!}\right)\exp(-y)\right]^{\alpha-1},$$

respectivamente.

A função de risco da GE é

$$h(y) = \frac{\alpha y^{a-1}\exp(-y)\gamma^{\alpha-1}(a,y)}{\Gamma^{\alpha}(a) - \gamma^{\alpha}(a,y)}. \tag{4.14}$$

Observa-se que $h(y) \sim \alpha a^{1-\alpha} y^{a\,\alpha-1}/\Gamma^{\alpha}(a)$ quando $y \to 0$ e que $h(y) \to 1$ com $h'(y) \to 0$ quando $y \to \infty$. Outras características de (4.13) e (4.14) encontram-se em Nadarajah e Kotz (2006).

Entretanto, pode-se obter o modelo exponencializado para a distribuição gama de parâmetros (α, β). Então, seja a função de distribuição e função densidade da distribuição gama, respectivamente,

$$F(y) = \frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}, \quad y > 0,$$

$$f(y) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}\exp(-\beta y), \quad y > 0.$$

Então, a f.d.a. e f.d.p. da distribuição gama exponencializada ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) = \left[\frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\lambda} \tag{4.15}$$

função densidade

$$g_{\lambda}(y) = \frac{\lambda \beta^{\alpha} y^{\alpha-1} \exp(-\beta y)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\lambda-1} \tag{4.16}$$

A função de distribuição da gama exponencializada (GE) pode ser reduzida utilizando-se a expansão

$$\gamma(a, y) = y^{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} y^{m}}{(a+m)m!} \tag{4.17}$$

Então, (4.15) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \left[(\beta y)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} (\beta y)^{m}}{(\alpha+m)m!}\right]^{\lambda} \\ &= \frac{(\beta y)^{\alpha\lambda}}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} (\beta y)^{m}}{(\alpha+m)m!}\right]^{\lambda}, \end{aligned}$$

e ainda, pode ser reduzida utilizando-se a expansão

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j} \Gamma(b) z^{j}}{\Gamma(b-j) j!}, \quad b > 0, \text{ real e não-inteiro.} \tag{4.18}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{(\beta y)^{\alpha\lambda}}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \left[1 - \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} (\beta y)^{m}}{(\alpha+m)m!}\right)\right]^{(\lambda+1)-1} \\ &= \frac{(\beta y)^{\alpha\lambda}}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j} \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-j) j!} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} (\beta y)^{m}}{(\alpha+m)m!}\right)^{j}. \end{aligned}$$

Aplicando-se o binômio de Newton

$$(x+a)^{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{r} x^{n-r} \tag{4.19}$$

tem-se que

$$G(y) = \frac{(\beta y)^{\alpha\lambda}}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-j)j!} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} (-1)^r \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta y)^m}{(\alpha+m)m!} \right)^r . \quad (4.20)$$

Utilizando-se a expansão

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^k = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=1}^{\infty} a_{m_1} \ldots a_{m_k} \quad (4.21)$$

e aplicando-a em (4.20), tem-se que

$$G(y) = \frac{(\beta y)^{\alpha\lambda}}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-j)j!} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} (-1)^r \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r} (\beta y)^{m_1+\cdots+m_r}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_r) m_1! \ldots m_r!} \right].$$

Da mesma forma, combinando (4.17), (4.18), (4.19) e (4.21) e substituindo em (4.16), obtem-se

$$g_\lambda(y) = \frac{\lambda \beta^{\alpha\lambda} y^{\alpha\lambda-1} \exp(-\beta y)}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)j!} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} (-1)^r$$

$$\times \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r} (\beta y)^{m_1+\cdots+m_r}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_r) m_1! \ldots m_r!}.$$

A expressão geral para obtenção do n-ésimo momento de Y é dada por

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \int_0^{\infty} y^r g_\lambda(y) dy \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)^{\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)j!} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} (-1)^r \\ &\times \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_r) m_1! \ldots m_r!} \right] \quad (4.22) \\ &\times \int_0^{\infty} \beta^{(\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)} y^{(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)-1} \exp(-\beta y) dy. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo (4.22) por $\frac{\beta^r}{\Gamma(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}$ tem-se que

$$\begin{aligned}
E(Y^r) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)^\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)j!}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}(-1)^r \\
&\times\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_r)m_1!\ldots m_r!}\right] \\
&\times\frac{\Gamma(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}{\beta^r} \\
&\times\underbrace{\int_0^\infty\frac{\beta^{(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}}{\Gamma(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}y^{(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)-1}\exp(-\beta y)dy}_{y\sim Gama(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
E(Y^r) &= \frac{\lambda}{\beta^r\Gamma(\alpha)^\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)j!}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}(-1)^r \\
&\times\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r}\Gamma(r+\alpha\lambda+m_1+\cdots+m_r)}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_r)m_1!\ldots m_r!}\right].
\end{aligned}$$

4.6 Distribuição de Gumbel Exponencializada

A distribuição de Gumbel é talvez a distribuição estatística mais aplicada em modelagem climática. É também conhecida como distribuição do valor extremo Tipo I. Algumas de suas aplicações em modelagem climática incluem: problemas com o aquecimento global, análise da frequência de inundações, modelagem da chuva e velocidade do vento (NADARAJAH; KOTZ, 2006).

Aqui será introduzida a distribuição de Gumbel Exponencializada (GbE) que generaliza a distribuição de Gumbel da mesma forma que EE generaliza a distribuição exponencial. A f.d.a. da distribuição de Gumbel é

$$F(y) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \tag{4.23}$$

para $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$. Logo, a f.d.a. da distribuição de Gumbel exponencializada iguala

$$G(y) = \left\{ \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^{\alpha}, \tag{4.24}$$

para $\alpha > 0$. A função densidade da GbE é dada por

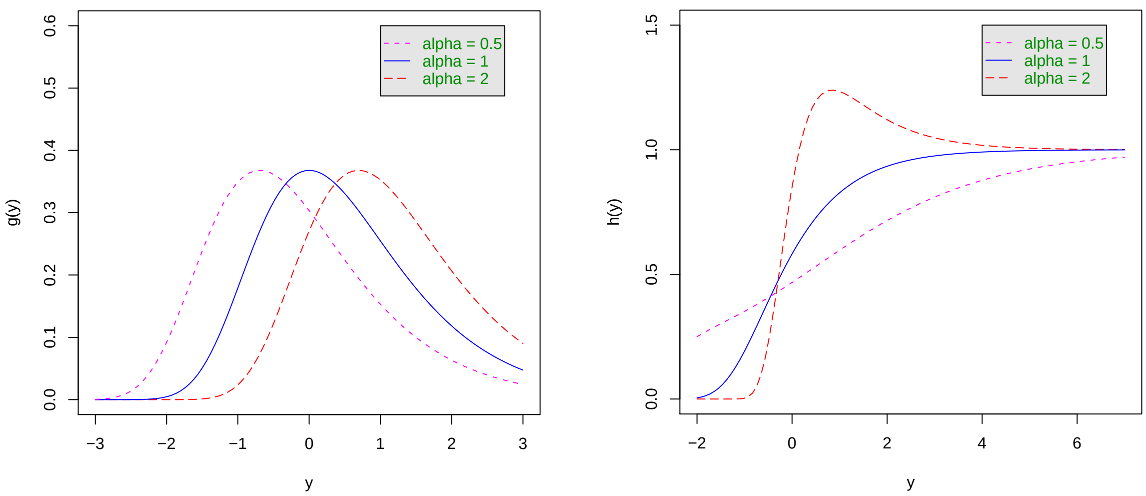
$$g(y) = \frac{\alpha}{\sigma} \exp\left\{ -\exp\left[\alpha \left(-\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma} \right). \tag{4.25}$$

Assim, a distribuição de Gumbel é um caso particular de (4.25) quando $\alpha = 1$.

A função de risco de GbE é dada por

$$h(y) = \frac{\alpha z \exp(-\alpha z)}{\sigma[1 - \exp(-\alpha z)]}, \tag{4.26}$$

em que $z = \exp[-(y-\mu)/\sigma]$. As figuras 2(a) e 2(b) ilustram as possíveis formas da f.d.p. e função de risco, respectivamente, da GbE para valores selecionados de α e $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.



(a) F.d.p. da distribuição EGb. (b) Função de risco da distribuição EGb.

Figura 2: Função densidade e Função de risco da distribuição de Gumbel exponencializada para valores selecionados de α e $\sigma = 1$ e $\mu = 0$.

Se Y tem a f.d.p. (4.25), então seu r-ésimo momento pode ser calculado utilizando-se a transformação $Z = \exp[-(Y-\mu)/\sigma]$ em (4.25) e, portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} E(Z^r) &= \int_0^\infty z^r \frac{\alpha}{\sigma} \exp(-\alpha z) z dz = \frac{\alpha}{\sigma} \int_0^\infty z^{r+1} e^{-\alpha z} dz \\ &= \frac{1}{\sigma\alpha^r} \int_0^\infty (\alpha z)^{(r+2)-1} e^{-\alpha z} dz = \frac{\Gamma(r+2)}{\sigma\alpha^r}. \end{aligned}$$

A log-verossimilhança de uma amostra aleatória $y_1, \ldots, y_n$ de (4.25) é

$$l(\mu,\sigma,\alpha) = n[\log\alpha - \log\sigma] - \sum_{i=1}^n \exp\left[\alpha\left(-\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)\right] - \frac{1}{\sigma}\left[\sum_{i=1}^n y_i - n\mu\right].$$

5 Modelos Beta

5.1 Distribuição Beta Gumbel

A distribuição beta Gumbel (BG) é uma generalização da distribuição Gumbel e foi proposta por Nadarajah e Kotz (2004) com o intuito que a mesma pudesse ser amplamente aplicada nas diversas áreas da engenharia, já que sua cauda apresenta maior flexibilidade em relação à Gumbel.

Define-se, agora, uma classe de distribuições generalizadas a partir da f.d.a. $G(y)$ por

$$F(y) = I_{G(y)}(a, b) \tag{5.1}$$

para $a > 0$ e $b > 0$ com $G(y)$ representando a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória conhecida e

$$I_y(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)}$$

representando a razão da função beta incompleta e $B_y(a, b)$ é a própria função beta incompleta. Então, para obter a generalização da distribuição de Gumbel tem-se que sua função de distribuição é dada por

$$G(y) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right],$$

para $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$. Portanto, a função de distribuição da beta Gumbel é dada por

$$F(y) = I_{\exp(-u)}(a, b)$$

para $-\infty < y < \infty$, $a > 0$, $b > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, em que $u = \exp[-(y - \mu)/\sigma]$.

A função densidade é dada por

$$f(y) = \frac{u \exp(-au)[1 - \exp(-u)]^{b-1}}{\sigma B(a, b)}$$

e, também, pode ser expressa como

$$f(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\sigma\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u \exp[-(a+k)u]}{k!\Gamma(b-k)}.$$

A função de risco é dada por

$$h(y) = \frac{u \exp(-au)[1-\exp(-u)]^{b-1}}{\sigma B(a,b) I_{\exp(-u)}(b,a)}.$$

Segundo Nadarajah e Kotz (2004), utilizando as propriedades especiais da razão da função beta incompleta é possível mostrar que $h(y)$ é uma função crescente de y e que, além disso, $h(y) \to 0$ quando $y \to 0$ e $h(y) \to b$ quando $y \to \infty$.

Se Y tem distribuição BG, então o seu n-ésimo momento pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \frac{1}{\sigma B(a,b)} \int_{-\infty}^{\infty} y^n \left\{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{b-1} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &\times \exp\left[-a \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right] dy \end{aligned}$$

em que $u = \exp[-(y-\mu)/\sigma]$, o que reduz a equação acima para

$$E(Y^n) = \frac{1}{B(a,b)} \int_{0}^{\infty} (\mu - \sigma \log u)^n [1-\exp(-u)]^{b-1} \exp(-au) du.$$

Logo, os principais momentos são

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l [\mu + C\sigma + \sigma(l+a)]}{l!(l+a)\Gamma(b-l)} \\ E(Y^2) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \times \frac{1}{[l!(l+a)\Gamma(b-l)]} \\ &\times [6\mu^2 + (\pi^2 + 6C^2)\sigma^2 + 12C\mu\sigma \\ &+ 12\sigma(\mu + C\sigma)\log(a+l) + 6\sigma^2 \log^2(a+l)], \end{aligned}$$

em que C é a constante de Euler e a variância pode ser obtida da relação

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y).$$

5.2 Distribuição Beta Fréchet

Proposta por Nadarajah e Gupta (2004), a distribuição beta Fréchet (BF) foi definida tendo a $G(y)$ em (5.1) como a f.d.a. da distribuição Fréchet padrão, ou seja,

$$G(y) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]$$

para $y > 0$, $\sigma > 0$ e $\lambda > 0$. Portanto, a f.d.a. da distribuição BF é dada por

$$F(y) = I_{\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]}(a,\, b)$$

para $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\sigma > 0$ e $\lambda > 0$. A função densidade da BF é dada por

$$f(y) = \frac{\lambda\sigma^{\lambda}\exp\left[-a\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right\}^{b-1}}{y^{1+\lambda}B(a,b)}$$

e pode ser expressa, também, por

$$f(y) = \frac{\lambda\sigma^{\lambda}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\exp\left[-(a+k)\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]}{y^{1+\lambda}\,k!\,\Gamma(b-k)}.$$

A função de risco é dada por

$$h(y) = \frac{\lambda\sigma^{\lambda}\exp\left[-a\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right\}^{b-1}}{B(a,b)y^{1+\lambda}I_{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]}(b,\, a)}.$$

Segundo Nadarajah e Gupta (2004), utilizando-se as propriedades especiais da função beta incompleta, é possível mostrar que $h(y)$ tem uma moda simples em $y = y_0$ com $h(0) = h(\infty) = 0$, sendo que y_0 é a solução de $d\log h(y)/dy = 0$.

Souza et al. (2008) obteve outras formas de representação da f.d.a da beta Fréchet dependendo se o parâmetro $b > 0$ é real e não-inteiro ou inteiro. Então, seja

$$F(y) = \frac{\lambda\sigma^{\lambda}}{B(a,b)}\int_{0}^{y} e^{-a\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}\left(1-e^{-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}\right)^{b-1}y^{-(\lambda+1)}dy.$$

Fazendo $u = (\frac{\sigma}{y})^{\lambda}$, tem-se que

$$F(y) = \frac{1}{B(a,b)} \int_{\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}^{\infty} e^{-au}(1-e^{-u})^{b-1} du.$$

Se $b > 0$ é real e não-inteiro e utilizando-se a relação

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b) z^j}{\Gamma(b-j) j!},$$

tem-se que

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_{\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}^{\infty} e^{-au} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b) e^{-uj}}{\Gamma(b-j) j!} du \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} \int_{\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}^{\infty} e^{-(a+j)u} du, \end{aligned}$$

então

$$F(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j e^{-(a+j)\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}. \tag{5.2}$$

Se $b > 0$ é inteiro, utiliza-se a expansão binomial $(1-e^{-u})^{b-1}$ para produzir

$$F(y) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j e^{-(a+j)\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}}}{a+j}. \tag{5.3}$$

As equações (5.2) e (5.3) são alguns dos principais resultados de Souza et al. (2008).

Para obtenção do n-ésimo momento da BF, segundo Nadarajah e Gupta (2004), tem-se que

$$E(Y^n) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{\infty} y^n \exp\left[-(a-1)\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right] \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\lambda}\right]\right\}^{b-1} dy.$$

Entretanto, Souza et al. (2008) obteve os seguintes resultados:

✓Se $b > 0$ é real e não-inteiro

$$E(Y^r) = \frac{\sigma^r \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j) j!} \int_0^{\infty} u^{-r/\lambda} e^{-u(a+j)} du,$$

em que $u = (\frac{\sigma}{y})^{\lambda}$.

✓Se $r < \lambda$, o r-ésimo momento de Y é dado por

$$E(Y^r) = \frac{\sigma^r \Gamma(1 - r/\lambda)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (a+j)^{r/\lambda - 1}}{\Gamma(b-j)j!}. \tag{5.4}$$

✓Se $b > 0$ é inteiro e $r < \lambda$, tem-se que

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \frac{\sigma^r}{B(a,b)} \int_0^\infty u^{-r/\lambda} e^{-au} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} (-1)^k e^{-ku} du \\ &= \frac{\sigma^r}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} (-1)^k \int_0^\infty u^{-r/\lambda} e^{-(k+a)u} du, \end{aligned}$$

em que $u = (\frac{\sigma}{y})^\lambda$, e portanto,

$$E(Y^r) = \frac{\sigma^r \Gamma(1 - r/\lambda)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} (-1)^k (j+a)^{r/\lambda - 1}. \tag{5.5}$$

5.3 Distribuição Beta-Weibull

Uma variável aleatória Y tem distribuição beta-Weibull (BW), segundo Famoye et al. (2005), se sua função densidade é dada por

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{c}{\gamma} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{c-1} \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\gamma}\right)^c\right]\right\}^{\alpha-1} \exp\left[-\beta\left(\frac{y}{\gamma}\right)^c\right] \tag{5.6}$$

em que $y > 0$, α, β, c, $\gamma > 0$.

Algumas de suas propriedades são:

Lema 5.3.1. *O limite da densidade beta-Weibull quando $y \to \infty$ é 0 e o limite quando $y \to 0$ é dado por:*

$$\lim_{y \to 0} f(y) = \begin{cases} \infty, & se \quad \alpha c < 1 \\ \frac{c\Gamma(\alpha+\beta)}{\gamma\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & se \quad \alpha c = 1 \\ 0, & se \quad \alpha c > 1. \end{cases}$$

Lema 5.3.2. *Se X é uma variável aleatória beta com parâmetros α e β, então a variável aleatória $Y = \gamma[-\log(1-X)]^{1/c}$ com γ, $c > 0$ é uma variável aleatória com distribuição beta-Weibull.*

Lema 5.3.3. *Se X é uma variável aleatória beta-exponencial com parâmetros α, β, e θ,* *então a variável aleatória* $Y = \theta(X/\theta)^{1/c}$ *com* $c > 0$ *é uma variável aleatória com distribuição beta-Weibull.*

Teorema 5.3.1. *A distribuição beta-Weibull é unimodal. A moda é o ponto* $y_0 = 0$ *sempre que* $\alpha c < 1$ *ou sempre que* $\alpha c = 1$ *e* $\beta \geq (c-1)/2c$. *Para outros casos, a moda é o ponto* y_0 *que satisfaz a equação*

$$\beta c - (c-1)(y_0/\gamma)^{-c} = c(\alpha - 1)[\exp(y_0/\gamma)^c - 1]^{-1}.$$

As provas dos lemas e teorema acima estão em Famoye et al. (2005).

Para valores fixos de α, c e $\gamma = 1$, a moda da distribuição BW decresce quando β cresce. Fixando β, c e $\gamma = 1$, a moda cresce com α. Para valores fixos de α, β e c, a moda cresce com γ.

Para obtenção dos momentos da BW, primeiro calcula-se o valor esperado de $\left(\frac{Y}{\gamma}\right)^r$. Então, após algumas simplificações tem-se que

$$E\left[\left(\frac{Y}{\gamma}\right)^r\right] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(r/c+1)}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta+k)^{-(r+c)/c}}{k!\Gamma(\alpha-k)}.$$

Logo,

$$E(Y^r) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(r/c+1)\gamma^r}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta+k)^{-(r+c)/c}}{k!\Gamma(\alpha-k)}. \tag{5.7}$$

O somatório em (5.7) será finito quando α for um inteiro > 1 e o somatório terminará em $\alpha - 1$. Quando $\alpha > 1$, a equação (5.7) torna-se

$$E(Y^r) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(r/c+1)\gamma^r}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} (\beta+k)^{-(r+c)/c}.$$

As propriedades referentes a função de risco da BW são apresentadas por Lee et al. (2007) e são as seguintes:

Seja $S(y) = 1 - F(y)$ a função de sobrevivência; logo, a função de risco da distribuição beta-Weibull é dada por

$$h(y) = \frac{f(y)}{1 - F(y)} = \frac{f(y)}{S(y)},$$

em que $f(y)$ é dado por (5.6) e $G(y)$ e $S(y)$ são, respectivamente, a função de distribuição acumulada e a função de sobrevivência da BW.

Teorema 5.3.2. *O limite da função de risco da beta-Weibull quando $y \to 0$ é*

$$\lim_{y\to 0} h(y) = \begin{cases} \infty, & se \quad \alpha c < 1 \\ \frac{c\Gamma(\alpha+\beta)}{\gamma\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & se \quad \alpha c = 1 \\ 0, & se \quad \alpha c > 1. \end{cases}$$

e o limite da função de risco da beta-Weibull quando $y \to \infty$ é

$$\lim_{y\to \infty} h(y) = \begin{cases} \infty, & se \quad c > 1 \\ \frac{\beta}{\gamma}, & se \quad c = 1 \\ 0, & se \quad c < 1. \end{cases}$$

Teorema 5.3.3. *A distribuição beta-Weibull tem*

- *taxa de falha constante ($= \beta/\gamma$) quando $\alpha = c = 1$,*
- *taxa de falha decrescente quando $\alpha c \leq 1$ e $c \leq 1$,*
- *taxa de falha crescente quando $\alpha c \geq 1$ e $c \geq 1$,*
- *taxa de falha do tipo banheira quando $\alpha c < 1$ e $c > 1$, e*
- *taxa de falha do tipo banheira invertida quando $\alpha c > 1$ e $c < 1$.*

6 Modelos de Cordeiro e Stosic

A Família de distribuições proposta por Cordeiro e Stosic (2008) é uma variante das distribuições do tipo exponencializada, pois a primeira utiliza a função de sobrevivência enquanto que a segunda, a função acumulada como demonstrado abaixo.

Distribuição Tipo Exponencializada

$$G(y) = F(y)^{\lambda}$$

Distribuição Cordeiro e Stosic ou Estendida

$$1 - G(y) = [1 - F(y)]^{\lambda}$$

$$G(y) = 1 - [1 - F(y)]^{\lambda}$$

$$g(y) = \lambda[1 - F(y)]^{\lambda-1} f(y)dy$$

6.1 Propriedades da Família Cordeiro e Stosic

Para comprovar que a aplicação da transformação proposta por Cordeiro e Stosic (2008) mantém as características de função densidade das distribuições, segue abaixo a demonstração das seguintes propriedades:

$i) \int_{R_X} g_\lambda(y)dy = 1$

Prova:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda[1-F(y)]^{\lambda-1} f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [1-F(y)]^{\lambda-1} \lambda dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -d[1-F(y)]^{\lambda} = \int_{\infty}^{-\infty} d[1-F(y)]^{\lambda} \\
&= [1-F(y)]^{\lambda}\Big|_{\infty}^{-\infty} = 1
\end{aligned}$$

■

$ii) P(X \leq y) = 1 - [1-F(y)]^{\lambda}$

Prova:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{y} g_\lambda(x)dx &= \int_{-\infty}^{y} \lambda[1-F(x)]^{\lambda-1} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{y} [1-F(x)]^{\lambda-1} \lambda dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{y} -d[1-F(x)]^{\lambda} = \int_{y}^{-\infty} d[1-F(x)]^{\lambda} \\
&= [1-F(x)]^{\lambda}\Big|_{y}^{-\infty} = 1 - [1-F(y)]^{\lambda}
\end{aligned}$$

■

$iii) Z = F(X)$

$f_Z(z) = \lambda(1-z)^{\lambda-1}, \quad z \in [0,1]$

$E[(1-Z)^r] = \frac{\lambda}{r+\lambda} \quad r = 0, 1, 2, ...$

$E[Z^r] = \frac{r!}{(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+r)}$

6.2 Demonstrações

Será demonstrado a seguir, para cada distribuição inicial, qual a distribuição produzida com a aplicação da família de distribuições proposta por Cordeiro e Stosic (2008).

6.2.1 Distribuição Exponencial Estendida

Seja a distribuição exponencial com parâmetro α e função de distribuição e densidade definidas, respectivamente, por

$$F(y) = 1 - e^{-\alpha y},$$

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y},$$

com $y > 0$. Então, a f.d.a. e f.d.p. da distribuição obtida com a aplicação da transformação sugerida por Cordeiro e Stosic (2008) ficam assim definidas:

função de distribuição

$$\begin{aligned} G(y) &= 1 - [1 - (1 - e^{-\alpha y})]^{\lambda} \\ &= 1 - (e^{-\alpha y})^{\lambda} \end{aligned} \tag{6.1}$$

função densidade

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(y) &= \lambda \alpha e^{-\alpha y}[1 - (1 - e^{-\alpha y})]^{\lambda - 1} \\ &= (\lambda \alpha) e^{-(\lambda \alpha) y} \end{aligned}$$

Logo, a distribuição exponencial de parâmetro α na família de Cordeiro e Stosic produz a distribuição exponencial de parâmetro $\lambda\alpha$, ou seja:

$$Exp(\alpha) \rightarrow Exp(\lambda\alpha)$$

6.2.2 Distribuição Uniforme Estendida

Seja Y uma variável aleatória contínua que segue a distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ com f.d.a. e f.d.p., respectivamente, assim definidas:

$$F(y) = y$$

$$f(y) = 1$$

Aplicando a transformação de Cordeiro e Stosic (2008) obtém-se:

função de distribuição

$$G(y) \;\; = \;\; 1 - [1-y]^{\lambda}$$

função densidade

$$g_{\lambda}(y) \;\; = \;\; \lambda(1-y)^{\lambda-1}$$

Logo, a distribuição Uniforme em (0,1) na família de Cordeiro e Stosic produz a distribuição Beta $(1,\lambda)$, ou seja:

$$U(0,1) \rightarrow Beta(1,\lambda)$$

6.2.3 Distribuição de Weibull Estendida

Sabendo que a distribuição de Weibull tem função de distribuição e função densidade, respectivamente,

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right],$$

$$f(y) = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right],$$

com $\alpha, \gamma > 0$. Então, aplicando-se a transformação de Cordeiro e Stosic (2008) a f.d.a e f.d.p. ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) \;\; = \;\; 1 - \left\{\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]\right\}^{\lambda}$$

função densidade

$$\begin{aligned}
g_{\lambda}(y) &= \lambda\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]\left\{1-1+\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]\right\}^{\lambda-1}\\
&= \frac{\lambda\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]^{\lambda-1}\\
&= \frac{\lambda\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]^{\lambda}\\
&= \frac{\lambda\gamma}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\lambda\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]
\end{aligned}$$

Logo, tem-se que a distribuição de Weibull de parâmetros (α, γ) gera, na família de Cordeiro e Stosic, uma Weibull de parâmetros $(\alpha\lambda^{-1/\gamma}, \gamma)$, ou seja,

$$W(\alpha, \gamma) \rightarrow W(\alpha\lambda^{-1/\gamma}, \gamma)$$

6.2.4 Distribuição de Rayleigh Estendida

Seja a função de distribuição e função densidade da distribuição de Rayleigh definidas, respectivamente, por

$$F(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right),$$
$$f(y) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right),$$

com $y > 0, \sigma > 0$. Então, a f.d.a. e f.d.p. da distribuição obtida com a aplicação da transformação de Cordeiro e Stosic (2008) ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) \;=\; 1 - \left[\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\right]^{\lambda}$$

função densidade

$$\begin{aligned} g_\lambda(y) &= \lambda\frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\left[1 - 1 + \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\right]^{\lambda-1} \\ &= \lambda\frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)^{\lambda-1} \\ &= \lambda\frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)^{\lambda} = \lambda\frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\lambda y^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{y}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}\exp\left[-\frac{y^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

Logo, tem-se que a distribuição de Rayleigh de parâmetro σ gera, na família de Cordeiro e Stosic, uma Rayleigh de parâmetro $(\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}})$, ou seja,

$$R(\sigma) \rightarrow R(\sigma/\sqrt{\lambda})$$

6.2.5 Distribuição de Pareto Estendida

Sabendo que a distribuição de Pareto tem função de distribuição e densidade definidas, respectivamente, por

$$F(y) = 1 - \left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha},$$

$$f(y) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{y^{\alpha+1}},$$

com $y \geq k$, $\alpha > 0$. Então, aplicando-se a transformação de Cordeiro e Stosic (2008), a f.d.a e f.d.p. ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) \;=\; 1 - \left[\left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha}\right]^{\lambda}$$

função densidade

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(y) &= \lambda \frac{\alpha k^{\alpha}}{y^{\alpha+1}} \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda-1} \\ &= \lambda \frac{\alpha k^{\alpha}}{y^{\alpha+1}} \left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha(\lambda-1)} \\ &= \frac{\lambda \alpha k^{\lambda\alpha}}{y^{\lambda\alpha+1}} \end{aligned}$$

Logo, tem-se que a distribuição de Pareto de parâmetros (k, α) gera, na família de Cordeiro e Stosic, uma Pareto de parâmetros $(k, \lambda\alpha)$, ou seja,

$$P(I)(k, \alpha) \rightarrow P(I)(k, \lambda\alpha)$$

6.2.6 Distribuição Logística Padrão Estendida

Sabendo que a distribuição logística padrão tem função de distribuição e função densidade, respectivamente,

$$F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}},$$

$$f(y) = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2},$$

em que $y \in I\!R$. Então, aplicando-se a transformação de Cordeiro e Stosic (2008), a f.d.a e f.d.p. ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) \;=\; 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{1 + e^{-y}}\right)\right]^{\lambda}$$

função densidade

$$\begin{aligned} g_\lambda(y) &= \lambda \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}\left[1-\frac{1}{1+e^{-y}}\right]^{\lambda-1} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{(1+e^{-y})^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

Logo, tem-se que a distribuição logística de parâmetros $(0,1)$ gera uma logística generalizada tipo II de parâmetros $(\lambda, 1)$, ou seja,

$$Lo(0,1) \rightarrow LoGen(II)(\lambda, 1)$$

6.2.7 Distribuição de Fréchet Estendida

Sabendo que a distribuição de Fréchet tem função de distribuição

$$F(y) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^\alpha\right]$$

para $y > 0$, $\sigma > 0$ e $\alpha > 0$, então a nova distribuição, denominada *Fréchet Estendida*, é definida com o parâmetro adicional λ pela função de distribuição acumulada (f.d.a.)

$$G(y) = 1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^\alpha\right]\right\}^\lambda \tag{6.2}$$

para $\lambda > 0$.

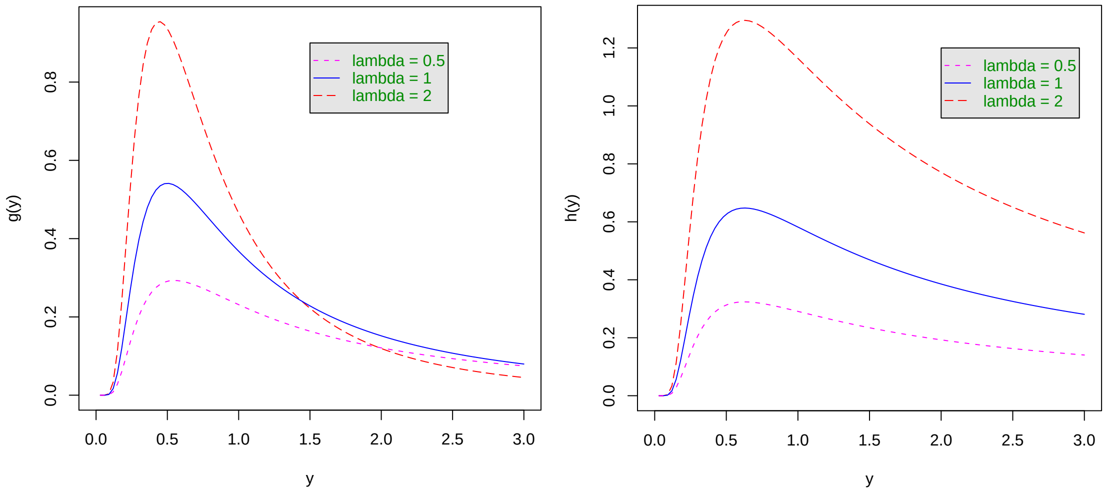
A distribuição de Fréchet Estendida (ExF) generaliza a distribuição de Fréchet da mesma forma que (6.1) generaliza a distribuição exponencial.

A função densidade é

$$g(y) = \lambda\alpha\sigma^\alpha \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^\alpha\right]\right\}^{\lambda-1} y^{-(1+\alpha)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^\alpha\right] \tag{6.3}$$

e quando tem-se $\lambda = 1$ retorna-se à distribuição original. A Figura 3(a) ilustra algumas das possíveis formas de (6.3) para valores selecionados de λ e $\sigma = 1,\ \alpha = 1$.

Segundo Nadarajah e Kotz (2006), de forma equivalente a distribuição EE, (6.2) também possui interpretações físicas interessantes. Suponha que o tempo de vida de n-componentes em um sistema em série são independentes e identicamente distribuídas de acordo com (6.2). Logo, o tempo de vida do sistema, também, segue a distribuição ExF.



(a) Função densidade da distribuição de Fréchet estendida (6.3).

(b) Função de risco da distribuição de Fréchet estendida (6.4).

Figura 3: Função densidade e Função de risco da distribuição de Fréchet estendida para valores selecionados de λ e $\sigma = 1,\ \alpha = 1$.

A função de risco é definida como sendo

$$h(y) = \frac{\lambda\alpha\sigma^{\alpha}y^{-(1+\alpha)}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\alpha}\right]}{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\alpha}\right]}. \tag{6.4}$$

A Figura 3(b) ilustra algumas das possíveis formas de (6.4) para valores selecionados de λ e $\sigma = 1,\ \alpha = 1$.

Os momentos da distribuição ExF são dados por

$$E(Y^n) = \int_0^{\infty} y^{n-1}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda} dy. \tag{6.5}$$

Substituindo $z = (\sigma/y)^{\alpha}$, (6.5) reduz-se a

$$E(Y^n) = \frac{\sigma^n}{\alpha}\int_0^{\infty} z^{-(n/\alpha+1)}[1-\exp(-z)]^{\lambda}dz. \tag{6.6}$$

Esta integral converge se $\lambda > n/\alpha$. Entretanto, não sabe-se como reduzir (6.6) a uma forma fechada. As medidas de assimetria e curtose podem ser obtidas usando (6.6) para todo $\lambda > 4/\alpha$.

Para obtenção dos EMV segue-se a forma usual, ou seja, a log-verossimilhança de uma amostra aleatória $y_1, \ldots, y_n$ de (6.3) é

$$\begin{aligned} l(\sigma, \lambda, \alpha) = & \; n \log(\lambda \alpha \sigma^{\alpha}) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{n} \log \left\{ 1 - \exp\left[- \left(\frac{\sigma}{y_i} \right)^{\alpha} \right] \right\} \\ - & \; (1 + \alpha) \sum_{i=1}^{n} \log y_i - \sigma^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} y_i^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Então, toma-se as derivadas de primeira ordem de (6.7) com relação aos três parâmetros (σ, α e λ), iguala-se cada equação a zero e resolve-se o sistema não-linear.

6.2.8 Distribuição Gumbel Estendida

Sabendo que a distribuição de Gumbel tem função de distribuição

$$F(y) = \exp\left[- \exp\left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

para $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, então a nova distribuição, denominada *Gumbel Estendida*, é definida pela função de distribuição acumulada (f.d.a.)

$$G(y) = 1 - \left\{ 1 - \exp\left[- \exp\left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^{\lambda} \tag{6.8}$$

para $\lambda > 0$.

A distribuição de Gumbel Estendida (ExGb) generaliza a distribuição de Gumbel da mesma forma que (6.1) generaliza a distribuição exponencial.

A função densidade é

$$g(y) = \frac{\lambda}{\sigma} \left\{ 1 - \exp\left[- \exp\left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^{\lambda - 1} \exp\left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \exp\left[- \exp\left(- \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \tag{6.9}$$

e tem-se que a distribuição de Gumbel padrão é um caso particular de (6.9) quando $\lambda = 1$.

Segundo Nadarajah e Kotz (2006), de forma equivalente às distribuições EE e EW, (6.8) também possui interpretações físicas interessantes. Suponha que o tempo de vida de n-componentes em um sistema em série são independentes e identicamente distribuídas de acordo com (6.8). Logo, o tempo de vida do sistema, também, segue a distribuição ExG.

A função de risco é definida como sendo

$$h(y) = \frac{\lambda u \exp(-u)}{\sigma[1 - \exp(-u)]},$$

em que $u = \exp[-(y-\mu)/\sigma]$.

Os momentos da distribuição ExG são dados por

$$E(Y^n) = \frac{\lambda}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} y^n \left\{1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$
$$\times \exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right] dy.$$

e fazendo $u = \exp[-(y-\mu)/\sigma]$, reduz-se a

$$E(Y^n) = \lambda \int_0^{\infty} (\mu - \sigma \log u)^n [1 - \exp(-u)]^{\lambda-1} \exp(-u) du.$$

6.2.9 Distribuição Qui-quadrado Estendida

Seja a função de distribuição e função densidade da distribuição qui-quadrado, respectivamente,

$$F(y) = \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad y > 0,$$

$$f(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad y \geq 0.$$

Então, a f.d.a. e f.d.p. da distribuição obtida com a aplicação da transformação de Cordeiro e Stosic (2008) ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) = 1 - \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^{\lambda}$$

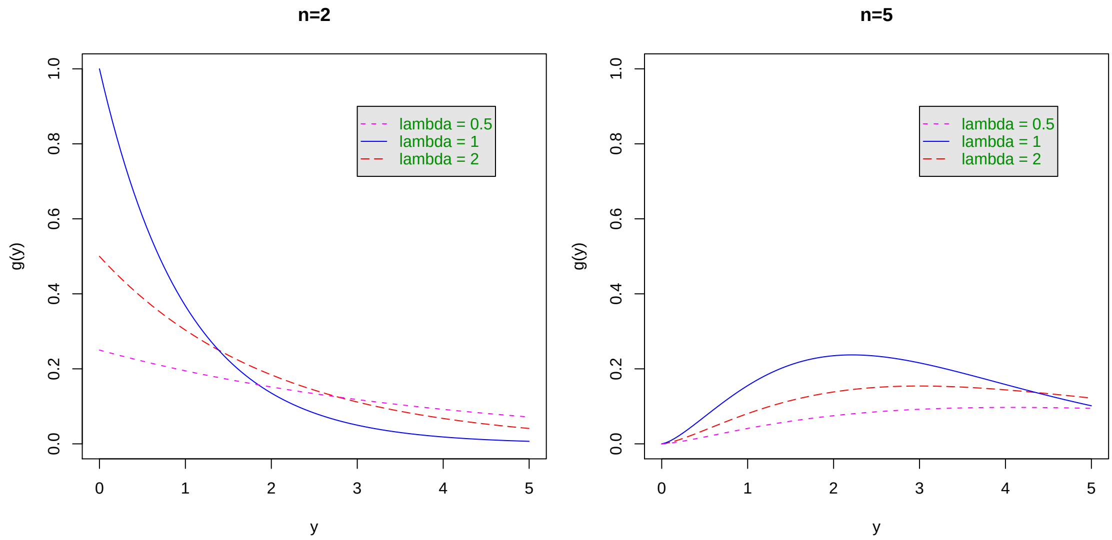
função densidade

$$g_{\lambda}(y) = \lambda \frac{y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2})}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^{\lambda-1}$$
$$= \frac{\lambda y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}) \left[\Gamma(\frac{n}{2}) - \gamma(\frac{n}{2}, \frac{y}{2})\right]^{\lambda-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}$$

Por definição $\Gamma(a,y) = \Gamma(a) - \gamma(a,y)$, então

$$g_\lambda(y) = \frac{\lambda y^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{y}{2})\left[\Gamma(\frac{n}{2},\frac{y}{2})\right]^{\lambda-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^\lambda}. \tag{6.10}$$

Logo, tem-se que a distribuição χ^2_n gera uma distribuição aqui denominada *Distribuição Qui-Quadrado Estendida*. A Figura 4 ilustra algumas das possíveis formas de (6.10) para valores selecionados de λ e $n = 2$, e $n = 5$.



(a) Função densidade da distribuição qui-quadrado estendida com $n = 2$.
(b) Função densidade da distribuição qui-quadrado estendida com $n = 5$.

Figura 4: Função densidade da distribuição qui-quadrado estendida para valores selecionados de λ e $n = 2$ e $n = 5$.

A função de risco é definida como sendo

$$h(y) = \frac{\lambda y^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{y}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2},\frac{y}{2})}. \tag{6.11}$$

A Figura 5 ilustra algumas das possíveis formas de (6.11) para valores selecionados de λ e $n = 5$.

Outras características importantes dessa nova distribuição tais como seus momentos, função geradora de momentos e função característica são calculadas a seguir:

- Momentos

$$E(Y^r) = \mu'_r = \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^\lambda}\int_0^\infty y^{r+\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{y}{2}\right)^{\lambda-1}dy$$

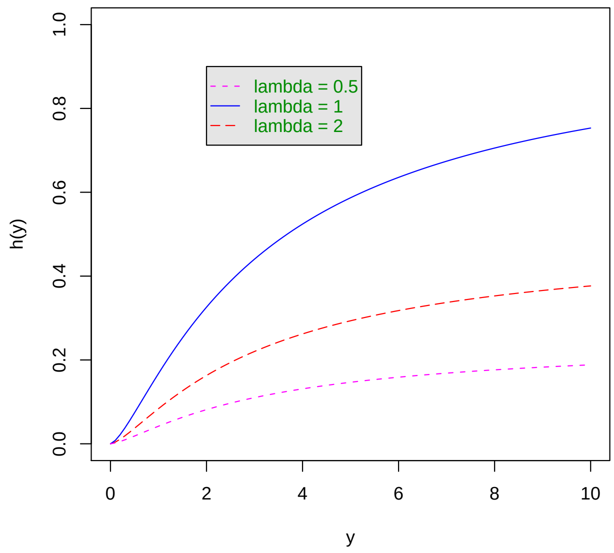


Figura 5: Função de risco da distribuição qui-quadrado estendida para valores selecionados de λ e $n = 5$.

Fazendo $y/2 = t$, tem-se que

$$\mu'_r = \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}} \int_0^{\infty} 2^{r+\frac{n}{2}-1}\, t^{r+\frac{n}{2}-1} \exp(-t)\Gamma\left(\frac{n}{2}, t\right)^{\lambda-1} 2dt$$

$$\mu'_r = \frac{\lambda 2^r}{\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}} \int_0^{\infty} t^{r+\frac{n}{2}-1} \exp(-t)\Gamma\left(\frac{n}{2}, t\right)^{\lambda-1} dt$$

Para $n = 2 \Rightarrow \Gamma(1, t) = e^{-t}$, logo

$$\mu'_r = \lambda 2^r \int_0^{\infty} t^r \exp(-t) e^{-t(\lambda-1)} dt$$

Seja $t\lambda = u$, então

$$\mu'_r = \lambda 2^r \int_0^{\infty} \frac{u^r}{\lambda^r} \exp(-u) \frac{du}{\lambda}$$

$$\mu'_r = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^r \int_0^{\infty} u^{r+1-1} du$$

$$\mu'_r = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^r \Gamma(r+1)$$

• Função geradora de momentos

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) = E(e^{tY}) &= \int_0^\infty \frac{e^{ty}\lambda y^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{y}{2})\Gamma(\frac{n}{2},\frac{y}{2})^{\lambda-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}dy \\
&= \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}e^{y\left(t-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{y}{2}\right)^{\lambda-1}dy
\end{aligned}
$$

Fazendo $y/2 = z$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int_0^\infty 2^{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1}\exp[z(2t-1)]\Gamma\left(\frac{n}{2},z\right)^{\lambda-1}2dz \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int_0^\infty z^{\frac{n}{2}-1}\exp[z(2t-1)]\Gamma\left(\frac{n}{2},z\right)^{\lambda-1}dz
\end{aligned}
$$

Para $n = 2 \Rightarrow \Gamma(1,z) = e^{-z}$, logo

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \lambda\int_0^\infty \exp[z(2t-1)]e^{-z(\lambda-1)}dz \\
&= \lambda\int_0^\infty e^{2tz}e^{-\lambda z}dz \\
&= \lambda\int_0^\infty e^{-z(\lambda-2t)}dz
\end{aligned}
$$

Seja $z(\lambda-2t) = u$, então

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \lambda\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{\lambda-2t} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-2t}\int_0^\infty e^{-u}du \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-2t}, \quad t < \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}
$$

• Função Característica

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) = E(e^{itY}) &= \int\limits_0^\infty \frac{e^{ity}\lambda y^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{y}{2})\Gamma(\frac{n}{2},\frac{y}{2})^{\lambda-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}dy \\ &= \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int\limits_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}e^{y\left(it-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{y}{2}\right)^{\lambda-1}dy\end{aligned}$$

Fazendo $y/2 = z$, tem-se que

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= \frac{\lambda}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int\limits_0^\infty 2^{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1}\exp[z(2it-1)]\Gamma\left(\frac{n}{2},z\right)^{\lambda-1}2dz \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}\int\limits_0^\infty z^{\frac{n}{2}-1}\exp[z(2it-1)]\Gamma\left(\frac{n}{2},z\right)^{\lambda-1}dz\end{aligned}$$

Para $n = 2 \Rightarrow \Gamma(1, z) = e^{-z}$, logo

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= \lambda\int\limits_0^\infty \exp[z(2it-1)]e^{-z(\lambda-1)}dz \\ &= \lambda\int\limits_0^\infty e^{2itz}e^{-\lambda z}dz \\ &= \lambda\int\limits_0^\infty e^{-z(\lambda-2it)}dz\end{aligned}$$

Seja $z(\lambda - 2it) = u$, então

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= \lambda\int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{du}{\lambda-2it} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-2it}\int\limits_0^\infty e^{-u}du \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-2it}\end{aligned}$$

6.2.10 Distribuição Gama Estendida

Seja a função de distribuição e função densidade da distribuição gama, respectivamente,

$$F(y) = \frac{\gamma(\alpha,\beta y)}{\Gamma(\alpha)}, \quad y > 0,$$

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp(-\beta y), \quad y > 0.$$

Então, a f.d.a. e f.d.p. da distribuição obtida com a aplicação da transformação de Cordeiro e Stosic (2008) ficam assim definidas:

função de distribuição

$$G(y) = 1 - \left[1 - \frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}\right]^\lambda \tag{6.12}$$

função densidade

$$g_\lambda(y) = \lambda \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp(-\beta y) \left[1 - \frac{\gamma(\alpha, \beta y)}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\lambda-1} \tag{6.13}$$

Logo, tem-se que a distribuição gama (α, β) gera uma distribuição aqui denominada *Distribuição Gama Estendida*. A Figura 6 ilustra algumas das possíveis formas de (6.13) para valores selecionados de λ, $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

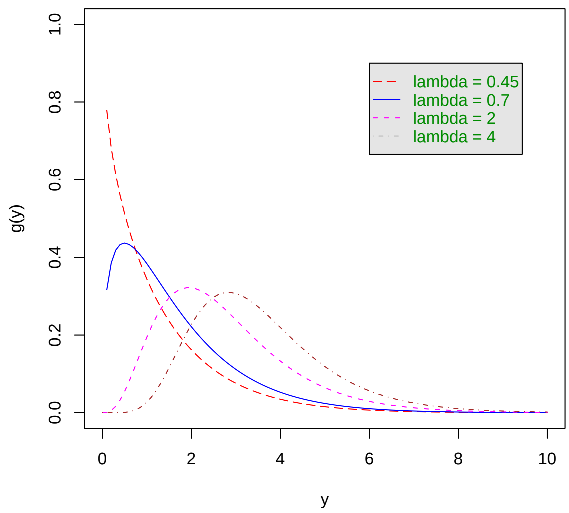


Figura 6: Função de densidade da distribuição gama estendida para valores selecionados de λ, $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

A função de distribuição da gama estendida (ExG) pode ser reduzida utilizando-se a expansão

$$(1 - z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b) z^j}{\Gamma(b-j) j!}, \quad b > 0, \text{ real e não-inteiro.} \tag{6.14}$$

Então, (6.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} G(y) &= 1-\left[1-\frac{\gamma(\alpha,\beta y)}{\Gamma(\alpha)}\right]^{(\lambda+1)-1} \qquad (6.15)\\ &= 1-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda+1)\gamma(\alpha,\beta y)^j}{\Gamma(\lambda+1-j)\Gamma(\alpha)^j j!}. \end{aligned}$$

Sabendo-se que

$$\gamma(a,y)=y^a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m y^m}{(a+m)m!}, \qquad (6.16)$$

e aplicando-a em (6.15), tem-se que

$$G(y)=1-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda+1)(\beta y)^{\alpha j}}{\Gamma(\lambda+1-j)\Gamma(\alpha)^j j!}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\beta y)^m}{(\alpha+m)m!}\right)^j. \qquad (6.17)$$

Utilizando-se a expansão

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)^k=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}a_{m_1}\ldots a_{m_k} \qquad (6.18)$$

e aplicando-a em (6.17), tem-se que

$$G(y)=1-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda+1)(\beta y)^{\alpha j}}{\Gamma(\lambda+1-j)\Gamma(\alpha)^j j!}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j}(\beta y)^{m_1+\cdots+m_j}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_j)m_1!\ldots m_j!}\right].$$

Da mesma forma, combinando (6.14), (6.16) e (6.18) e substituindo em (6.13), obtem-se

$$\begin{aligned} g_\lambda(y) &= \lambda\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}\exp(-\beta y)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)(\beta y)^{\alpha j}}{\Gamma(\lambda-j)\Gamma(\alpha)^j j!} \qquad (6.19)\\ &\times\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j}(\beta y)^{m_1+\cdots+m_j}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_j)m_1!\ldots m_j!}\right]. \end{aligned}$$

A função de risco correspondente a (6.19) é

$$h(y)=\lambda\beta^\alpha y^{\alpha-1}\exp(-\beta y). \qquad (6.20)$$

A Figura 7 ilustra algumas das possíveis formas de (6.20) para valores selecionados de λ e α com $\beta=1$.

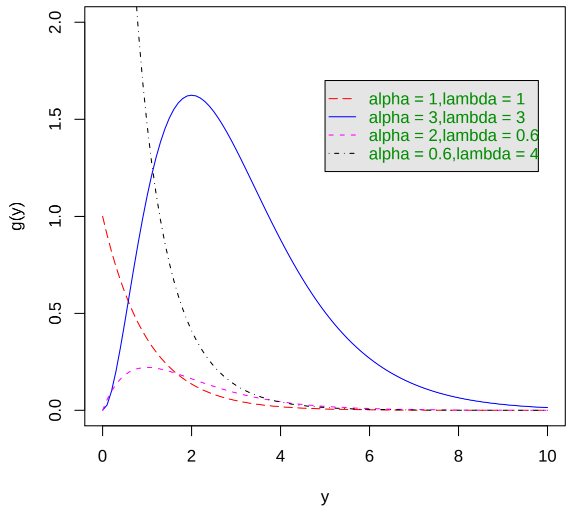


Figura 7: Função de risco da distribuição gama estendida para valores selecionados de λ e α com $\beta = 1$.

A expressão geral para obtenção do n-ésimo momento de Y é dada por

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \int_0^\infty y^r g_\lambda(y) dy \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - j)\Gamma(\alpha)^j j!} \\ &\times \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j}}{(\alpha + m_1)\ldots(\alpha + m_j) m_1! \ldots m_j!} \right] \\ &\times \int_0^\infty \beta^{(\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)} y^{(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)-1} \exp(-\beta y) dy. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Multiplicando e dividindo (6.21) por $\frac{\beta^r}{\Gamma(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)}$ tem-se que

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)\Gamma(\alpha)^j j!} \\ &\times \left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j}}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_j)m_1!\ldots m_j!}\right] \\ &\times\frac{\Gamma(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)}{\beta^r} \\ &\times \underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\beta^{(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)}}{\Gamma(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)}y^{(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)-1}\exp(-\beta y)dy}_{y\sim Gama(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \frac{\lambda}{\beta^r\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-j)\Gamma(\alpha)^j j!} \\ &\times \left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_j}\Gamma(r+\alpha+\alpha j+m_1+\cdots+m_j)}{(\alpha+m_1)\ldots(\alpha+m_j)m_1!\ldots m_j!}\right]. \end{aligned}$$

7 Estimação Bayesiana na distribuição exponencial exponencializada

Kundu e Gupta (2008) realizaram uma análise Bayesiana na distribuição GE e compararam seus desempenhos com as respectivas distribuições clássicas. Na referida análise, consideraram que os parâmetros α e λ não são negativos e, portanto, perfeitamente natural assumir a priori gama para ambos, apesar de não serem prioris conjugadas. Também, presumiu-se que os parâmetros α e λ são independentes *a priori*.

Kundu e Gupta (2008) consideraram a função perda do erro quadrático. Verificou-se que os estimadores de Bayes não podem ser expressos de forma explícita, mas podem ser obtidos por integrações numéricas. Eles utilizaram a idéia de Lindley para calcular os estimadores de Bayes aproximados dos parâmetros desconhecidos e observaram que a aproximação funcionou bem. Eles calcularam os estimadores de Bayes aproximados sob a suposição de prioris não-informativas e compararam-os com os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) através de simulações de Monte Carlo. Propuseram, também, técnicas MCMC (Markov Chain Monte Carlo) para gerar amostras das distribuições *a posteriori* e, por consequência, para calcular os estimadores de Bayes.

7.1 Estimação Bayesiana de parâmetros desconhecidos

Quando ambos os parâmetros são desconhecidos, assume-se que α e λ seguem a distribuição priori gama,

$$\pi_1(\lambda) \propto \lambda^{b-1} \exp(-a\lambda); \quad \lambda > 0, \tag{7.1}$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{d-1} \exp(-c\alpha); \quad \alpha > 0, \tag{7.2}$$

em que a, b, c e d são conhecidos e não-negativos.

Suponha que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é uma amostra aleatória de uma distribuição $GE(\alpha, \lambda)$. Baseada na função de verossimilhança dos dados observados,

$$l(dados|\alpha, \lambda) = \alpha^n \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \prod_{i=1}^{n} [1 - \exp(-\lambda y_i)]^{\alpha-1},$$

a função densidade posteriori de α e λ pode ser escrita como

$$l(\alpha, \lambda|dados) = \frac{l(dados|\alpha, \lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha)}{\int_0^\infty \int_0^\infty l(dados|\alpha, \lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha) d\alpha d\lambda}.$$

Portanto, o estimador de Bayes de qualquer função de α e λ, ou seja, $g(\alpha, \lambda)$, sobre a função perda do erro quadrático é

$$\hat{g}_B = E_{\alpha,\lambda|dados}[g(\alpha, \lambda)] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty g(\alpha, \lambda) l(dados|\alpha, \lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha) d\alpha d\lambda}{\int_0^\infty \int_0^\infty l(dados|\alpha, \lambda)\pi_1(\lambda)\pi_2(\alpha) d\alpha d\lambda}. \tag{7.3}$$

Entretanto, não é possível calcular (7.3) analiticamente. Então, Kundu e Gupta (2008) utilizaram duas aproximações: (a) aproximação de Lindley; (b) aproximação por MCMC.

Pelo método de aproximação de Lindley, os estimadores de Bayes aproximados de α e λ, sob a função perda do erro quadrático, são

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_B = \hat{\alpha} &+ \frac{1}{2}\Bigg[\frac{2n}{\hat{\alpha}^3}\tau_{11}^2 + \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^3 e^{-\hat{\lambda} y_i}(1 + e^{-\hat{\lambda} y_i})}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})^3}\right)\tau_{21}\tau_{22} \\
&- \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2 e^{-\hat{\lambda} y_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})^2}\right)(\tau_{22}\tau_{11} + 2\tau_{21}^2)\Bigg] + \left(\frac{d-1}{\hat{\alpha}} - c\right)\tau_{11} + \left(\frac{b-1}{\hat{\lambda}} - a\right)\tau_{12}, \\
\hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} &+ \frac{1}{2}\Bigg[\frac{2n}{\hat{\alpha}^3}\tau_{12}\tau_{11} + \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^3 e^{-\hat{\lambda} y_i}(1 + e^{-\hat{\lambda} y_i})}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})^3}\right)\tau_{22}^2 \\
&- \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{3y_i^2 e^{-\hat{\lambda} y_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})^2}\right)(\tau_{22}\tau_{21})\Bigg] + \left(\frac{d-1}{\hat{\alpha}} - c\right)\tau_{21} + \left(\frac{b-1}{\hat{\lambda}} - a\right)\tau_{22},
\end{aligned}$$

respectivamente, em que,

$$\tau_{11} = \frac{W}{UW - V^2}, \quad \tau_{12} = -\frac{V}{UW - V^2} = \tau_{21}, \quad \tau_{22} = \frac{U}{UW - V^2} \quad \text{e}$$

$$U = \frac{n}{\hat{\alpha}^2}, \quad V = -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i e^{-\hat{\lambda} y_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})}, \quad W = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} + (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2 e^{-\hat{\lambda} y_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} y_i})^2}.$$

Se α é conhecido, então o estimador de Bayes de λ, com a priori dada em (7.1), não pode ser expresso explicitamente. Então, o estimador de Bayes aproximado de λ sob a função de perda quadrática é

$$\hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} + \frac{1}{n}\Bigg\{[(b-1)\log\hat{\lambda} - a\hat{\lambda}]\left[\frac{1}{\hat{\lambda}^2} + (\alpha-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2 e^{-\hat{\lambda}y_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}y_i})^2}\right]^{-1}$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\hat{\lambda}^2} + (\alpha-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2 e^{-\hat{\lambda}y_i}}{(1-e^{-\hat{\lambda}y_i})^2}\right]^{-2} \times \left(\frac{2}{\hat{\lambda}^3} + (\alpha-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^3(1+e^{-\hat{\lambda}y_i})}{(1-e^{-\hat{\lambda}y_i})^3}\right)\Bigg\}.$$

Quando λ é conhecido e tem a priori dada em (7.2), a função densidade *a posteriori* de α é gama com parâmetros de forma e escala, respectivamente, $d+n$ e $c-\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda y_i})$. Entretanto, sob a função de perda quadrática, o estimador de Bayes de α é

$$\frac{n+d}{c-\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda y_i})}.$$

Observa-se, também, que para a priori não-informativa, isto é, quando $c = d = 0$, o estimador de Bayes e o EMV de α são idênticos.

Utilizando-se o método MCMC tem-se que a função densidade posteriori de α e λ pode ser escrita da seguinte forma:

$$l(\alpha,\lambda|dados) \propto \alpha^{n+d-1}\lambda^{n+b-1}\exp\left[-\lambda(a+\sum_{i=1}^{n}y_i)\right]\exp(-c\infty)\prod_{i=1}^{n}[1-\exp(-\lambda y_i)]^{\alpha-1}.$$

Logo, a função densidade posteriori de α dado λ é

$$l(\alpha|\lambda,dados) \propto \alpha^{n+d-1}\exp\left\{-\alpha\left[c-\sum_{i=1}^{n}\log(1-\exp(-\lambda y_i))\right]\right\}.$$

Portanto, a função densidade posteriori de α dado λ é uma gama com parâmetros de forma e escala, respectivamente, $d+n$ e $c-\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda y_i})$.

A função densidade posteriori de λ dado α é

$$l(\lambda|\alpha,dados) \propto \lambda^{n+b-1}\exp\left[-\lambda(a+\sum_{i=1}^{n}y_i)\right]\prod_{i=1}^{n}[1-\exp(-\lambda y_i)]^{\alpha-1},$$

Portanto, utilizando os resultados acima em dados de um exemplo, tem-se que, Kundu e Gupta (2008) concluíram que a aproximação de Lindley funcionou muito bem e que utilizando-se o método de simulação de Monte Carlo para avaliar o desempenho dos

EMV e estimadores aproximados de Bayes, sob a hipótese de prioris não-informativas, observou-se que as performances são bastante semelhantes. Com a aplicação da técnica MCMC para gerar amostra posteriori, observaram que tendo-se uma técnica MCMC eficaz, pode-se usar qualquer outra função de perda, por exemplo, função de perda absoluta. Finalmente, concluíram que, apesar de terem usado priori gama para o parâmetro de forma, o método pode ser usado para uma classe mais geral de prioris, tais como, funções densidade log-côncava. Para mais detalhes ver Kundu e Gupta (2008).

Conclusões

A partir da revisão das distribuições exponencializadas, a tabela abaixo foi construída com a finalidade de produzir um resumo das referidas distribuições. Gupta e Kundu são os principais estudiosos dessas distribuições, que em sua maioria são aplicadas em análises de tempos de vida, como alternativa, principalmente, para o uso da Weibull e gama.

Tabela 2: Resumo das distribuições exponencializadas

Distribuições contínuas	Distribuições Exponencializadas
$\text{Exp}(\lambda)$	$g(y) = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda y})^{\alpha-1}e^{-\lambda y}$
$\text{Fréchet}(\sigma, \lambda)$	$g(y) = \alpha\lambda\sigma^{\lambda}e^{-\alpha(\sigma/y)^{\lambda}}y^{-(1+\lambda)}$
$\text{Rayleigh}(\lambda)$	$g(y) = 2\alpha\lambda^2 y e^{-(\lambda y)^2}[1 - e^{-(\lambda y)^2}]^{\alpha-1}$
$\text{Weibull}(c, \alpha)$	$g(y) = \frac{c\theta}{\alpha}\left[1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\right]^{\theta-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c-1}$
$\text{Gama}(a, 1)$	$g(y) = \frac{\alpha y^{a-1}\exp(-y)}{\Gamma(a)}\left[\frac{\gamma(a,y)}{\Gamma(a)}\right]^{\alpha-1}$
$\text{Gumbel}(\mu, \sigma)$	$g(y) = \frac{\alpha}{\sigma}\exp\left\{-\exp\left[\alpha\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$

A transformação sugerida por Cordeiro e Stosic (2008) foi aplicada em algumas das principais distribuições contínuas. As distribuições geradas foram denominadas de *distribuições estendidas* e são apresentadas de forma resumida na Tabela 3. Algumas delas já são conhecidas e tem suas propriedades amplamente estudadas.

As distribuições, aqui denominadas, Fréchet e Gumbel Estendidas, foram apresentadas por Nadarajah e Kotz (2006) sob a denominação de Fréchet e Gumbel Exponencializadas, porém não apresentam a lei de formação das distribuições exponencializadas, mas das estendidas.

No que diz respeito às distribuições qui-quadrado e gama estendidas, elas são distribuições que ainda não haviam sido estudadas e que, neste trabalho, tiveram algumas de suas propriedades calculadas. As prioris para estas distribuições, devido às suas

Tabela 3: Resumo das distribuições estendidas

Distribuições contínuas	Distribuições Estendidas
$\text{Exp}(\alpha)$	$Exp(\lambda\alpha)$
$U(0,1)$	$\text{Beta}(1,\lambda)$
$W(\alpha,\gamma)$	$W(\alpha\lambda^{-1/\gamma},\gamma)$
$\text{Rayleigh}(\sigma)$	$\text{Rayleigh}(\sigma/\sqrt{\lambda})$
$\text{Pareto}(k,\alpha)$	$\text{Pareto}(k,\lambda\alpha)$
$\text{Logistica}(0,1)$	$\text{LoGen(II)}(\lambda,1)$
$\text{Fréchet}(\sigma,\alpha)$	$g(y)=\lambda\alpha\sigma^{\alpha}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda-1}y^{-(1+\alpha)}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{y}\right)^{\alpha}\right]$
$\text{Gumbel}(\mu,\sigma)$	$g(y)=\frac{\lambda}{\sigma}\left\{1-\exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\exp\left[-\exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]$
χ^2_n	$g(y)=\frac{\lambda y^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{y}{2})\left[\Gamma(\frac{n}{2})-\gamma(\frac{n}{2},\frac{y}{2})\right]^{\lambda-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})^{\lambda}}$
$\text{Gama}(a,1)$	$g(y)=\lambda\frac{y^{a-1}\exp(-y)}{\Gamma(a)}\left[1-\frac{\gamma(a,y)}{\Gamma(a)}\right]^{\lambda-1}$

naturezas, utilizam a priori de Jeffreys e após determinar as posteriores, verificou-se que as mesmas apresentavam formas não fechadas, para o que sugerimos um estudo para que se possa encontrar formas fechadas para as respectivas posterioris.

Referências

BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian Inference in Statistical Analysis (Wiley Classics Library)**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1992. 608p. ISBN 0471574287.

CHOUDHURY, A. A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution. **Metrika**, v. 62, n. 1, p. 17–22, 2005.

CORDEIRO, G. M. **Introdução à teoria de verossimilhança**. Rio de Janeiro: X Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 1992. 174p.

CORDEIRO, G. M.; STOSIC, B. D. An Extended Class of Distribution. **em preparação**, 2008.

EHLERS, R. S. Introdução à Inferência Bayesiana. 2003. Disponível em: <http://www.leg.ufpr.br/ paulojus/CE227/ce227/ce227.html>. Acesso em: 08-05-2008.

FAMOYE, F.; LEE, C.; OLUMOLADE, O. The Beta-Weibull Distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, v. 4, n. 2, p. 121–138, 2005.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized Exponential Distributions. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated Exponential Family: an alternative to gamma and Weibull distributions. **Biometrical Journal**, v. 43, n. 1, p. 117–130, 2001a.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized Exponential Distribution: different method of estimations. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 69, n. 4, p. 315–338, 2001b.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized Exponential Distribution: Statistical Inferences. **Journal of Statistical Theory and Applications**, v. 1, n. 1, p. 101–118, 2002.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Discriminating between gamma and Generalized Exponential Distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 74, n. 2, p. 107–121, 2004.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized Exponential Distribution: existing results and some recent developments. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 137, n. 11, p. 3537–3547, 2007.

KUNDU, D. Exponentiated Exponential Distribution. **Encyclopedia of Statistical Sciences**, v. 2, 2004. Wiley.

KUNDU, D.; GUPTA, R. D. Estimation of $P[Y < X]$ for generalized exponential distribution. **Metrika**, v. 61, n. 3, p. 291–308, 2005.

KUNDU, D.; GUPTA, R. D. Generalized exponential distribution: Bayesian estimations. **Computacional Statistics and Data Analysis**, v. 52, n. 4, p. 1873–1883, 2008. ISSN 0167-9473.

KUNDU, D.; RAQAB, M. Z. Generalized Rayleigh Distribution: different methods of estimations. **Computacional Statistics and Data Analysis**, v. 49, n. 1, p. 187–200, 2005.

LEE, C.; FAMOYE, F.; OLUMOLADE, O. Beta-Weibull Distribution: Some Properties and Applications to Censored Data. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, v. 6, n. 1, p. 173–186, 2007.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. Segunda edição. São Paulo: Edusp- Editora da Universidade de São Paulo, 2006. 411p.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. The Beta Fréchet Distribution. **Far East Journal of Theoretical Statistics**, v. 14, n. 1, p. 15–24, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The Exponentiated Fréchet Distribution. 2003. Disponível em: <http://interstat.statjournals.net/YEAR/2003/articles/0312001.pdf.>. Acesso em: 10-03-2007.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The Beta Gumbel Distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 4, p. 323–332, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The Exponentiated Type Distributions. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 92, n. 2, p. 97–111, 2006.

SOUZA, W. B.; CORDEIRO, G. M.; SIMAS, A. B. Some New Results on the Beta Fréchet Distribution. **Submetido**, 2008.